Программа курса лекций по линейной алгебре для студентов физико-химического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова.

1. Определение линейного пространства, простейшие следствия из аксиом. Примеры линейных пространств.
2. Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов в линейном пространстве. Основная лемма о линейной зависимости. Следствия. Примеры линейно зависимых и линейно независимых систем векторов. Понятие полной системы и базиса. Размерность конечномерного линейного пространства. Теорема о базисе. Примеры базисов. Теорема о дополнении линейно независимой системы векторов до базиса.
3. Координаты вектора в базисе, единственность координат. Матрица перехода между двумя базисами линейного пространства. Связь координат вектора в различных базисах
4. Понятие подпространства линейного пространства, примеры подпространств. Размерность подпространства. Теоремы о пересечении и объединении подпространств. Линейная оболочка и её свойства. Сумма подпространств. Формула для размерности суммы подпространств. Прямая сумма подпространств, примеры. Теорема о прямой сумме.
5. Линейные отображения. Примеры, задание линейного отображения образами базисных векторов. Ядро и образ линейного отображения, связь их размерностей с размерностью пространства. Мономорфизм, эпиморфизм и изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности. Теорема об изоморфизме для пространств одинаковой размерности.
6. Пространство линейных функционалов как сопряжённое линейное пространство. Сопряжённый базис и размерность сопряженного пространства. Второе сопряжённое пространство. Естественный изоморфизм между линейным пространством и его вторым сопряжённым.
7. Линейный оператор, определение и примеры. Матрица линейного оператора в базисе, вычисление с её помощью координат образа вектора. Невырожденный оператор и невырожденность его матрицы. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису. Подобные матрицы. Действия с линейными операторами.
8. Инвариантные подпространства. Примеры инвариантных подпространств. Строение матрицы оператора с инвариантным подпространством в специальном базисе. Приводимый оператор, строение его матрицы в специальном базисе. Понятие прямой суммы операторов.
9. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Примеры. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Инвариантность собственного подпространства. Критерий диаганализируемости матрицы линейного оператора.
10. Характеристический многочлен оператора, отыскание собственных значений оператора как корней его характеристического многочлена.

Алгебраическая и геометрическая кратности корня. Критерий диаганализируемости в терминах корней характеристического многочлена.

11. Нильпотентный оператор, его свойства. Наличие одномерного или двумерного инвариантного подпространства у всякого оператора в вещественном пространстве. Пример нильпотентного оператора. Понятие Жордановой нормальной формы и Жорданова базиса. Теорема о Жордановой нормальной форме (без доказательства). Теорема Гамильтона-Кэли (без доказательства).

12. Билинейные формы. Примеры билинейных форм. Матрица билинейной формы в базисе, закон её преобразования при переходе к новому базису. Квадратичная форма и её матрица в базисе. Связь квадратичных и билинейных форм (Полярная билинейная форма). Связь матриц квадратичной формы в различных базисах.

13. Приведение матрицы квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Нормальный вид квадратичной формы. Индексы инерции, закон инерции. Теорема Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определённости. Определитель Грамма, её свойства. Неравенство Коши-Буняковского.

14. Эвклидовы и нормированные пространства. Определение и примеры. Длины векторов и углы между ними. Ортогональные и ортонормированные системы векторов, их свойства. Ортогональные (ортонормированные) базисы. Ортогональные матрицы, ортогональность матрицы перехода между ортонормированными базисами. Ортогональное дополнение к множеству в Эвклидовом пространстве. Общий вид линейного функционала в Эвклидовом пространстве.

15. Линейные отображения и изоморфизмы Эвклидовых пространств. Теоремы об изоморфизме и об изоморфности. Сопряжённый оператор и его свойства. Самосопряжённый оператор, его свойства, строение матрицы самосопряжённого оператора в специальном базисе.

16. Изометрический оператор, теорема о его свойствах. Теоремы о свойствах инвариантных подпространств, собственных значениях и каноническом виде матрицы изометрического оператора. Неотрицательный оператор и корень из него. Теорема о представлении оператора в Эвклидовом пространстве в виде композиции неотрицательного и изометрического операторов.

17. Квадратичные формы в Эвклидовом пространстве. Приведение квадратичной формы к главным осям ортогональным преобразованием. Теорема об одновременном приведении пары форм, одна из которых положительно определена.

Список рекомендуемой литературы.

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1968.
2. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. - М.: Наука, 1999.

3. Ильин В.А., Ким Г.Б. Линейная алгебра. - М.: Изд-во МГУ, 1998.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1984.
5. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Изд-во МГУ, 1990.
6. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. - М.: Техиздат, 1956 (и последующие издания).

Лектор: доцент механико-математического факультета МГУ Кравцев С.В.