

Занятие 5. Механические колебания

ЦЕЛЬ: изучить законы колебаний: гармонических, затухающих и вынужденных.

Колебаниями называют процессы, в той или иной степени *повторяющиеся по времени*.

Свободными, или собственными, называют такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе.

Вынужденными называют колебания, происходящие под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Гармоническими называют колебания, в которых величина x изменяется по закону:

$$x = A \cdot \sin (\omega t + \varphi_0) \text{ либо } x = A \cdot \cos (\omega t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда – наибольшее отклонение системы от положения равновесия,

ω – циклическая частота колебаний – число колебаний за 2π секунд,

$(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний, φ_0 – начальная фаза,

$T=2\pi/\omega$ – период колебаний – время одного полного колебания, за которое фаза получает приращение 2π ,

$\nu=1/T=2\pi/\omega$ – частота колебаний – число колебаний за одну секунду.

Гармонические колебания происходят в системе, в которой действуют только квазиупругие силы. *Квазиупругая сила* – сила, независимо от своей природы изменяющаяся по закону

$$F = -kx,$$

где k – коэффициент упругости (жёсткость системы) или другой коэффициент пропорциональности между силой и смещением x ;

x – смещение колеблющейся системы от положения равновесия.

Работа № 6. Проверка закона сохранения момента импульса

ЦЕЛЬ: проверить закон сохранения момента импульса и энергии при неупругом взаимодействии маятников, оценить погрешность измерений.

ОБОРУДОВАНИЕ: специальная установка, секундомер, линейка.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

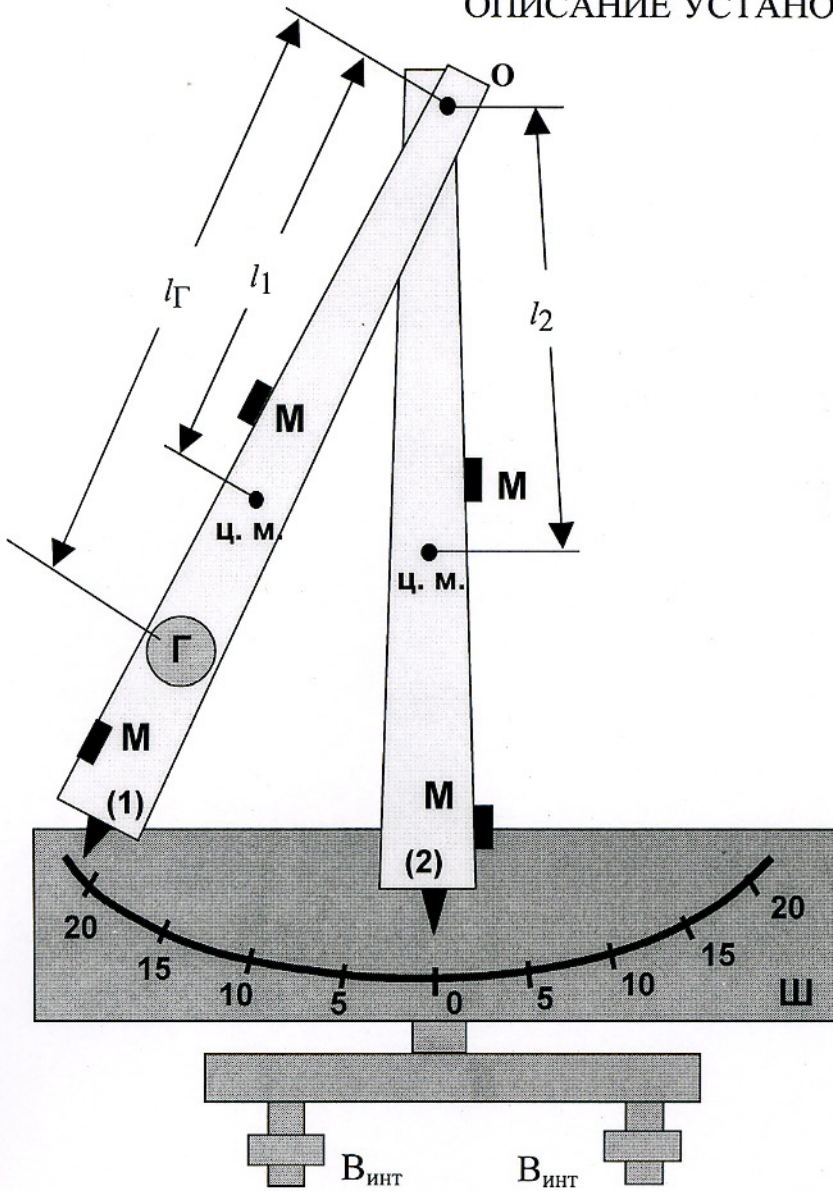


Рис. 1.

Установка состоит из двух физических маятников (1) (масса m_1) и (2) (масса m_2), которые независимо могут вращаться вокруг общей оси O (рис. 1). Маятники снабжены магнитами M , с помощью которых они стягиваются и могут вращаться вокруг оси O , как единое целое. Для изменения момента инерции к маятнику 1 может быть прикреплен добавочный груз Γ (масса m_Γ).

На каждом маятнике красной меткой указано положение центра масс (ц.м.), расстояние которого от оси вращения равно, соответственно, l_1 и l_2 .

Очевидно, центр масс маятника с добавочным грузом находится от оси вращения на расстоянии

$$l_{1\Gamma} = \frac{m_1 l_1 + m_\Gamma l_\Gamma}{m_1 + m_\Gamma},$$

где l_Γ – расстояние центра груза от оси вращения.

Центр масс двух маятников с добавочным грузом находится от оси вращения на расстоянии

$$l_{12\Gamma} = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_\Gamma l_\Gamma}{m_1 + m_2 + m_\Gamma}.$$

Если добавочный груз отсутствует, то это расстояние

$$l_{12} = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2}.$$

Угол отклонения маятника от положения равновесия определяется по шкале Ш. В положении равновесия маятники располагаются так, чтобы их визиры находились против нулевой отметки шкалы Ш. Это достигается с помощью винтов В в основании установки.

Если отклонить один из маятников, и закрепить в отклоненном положении, а второй отклонить и отпустить, то он будет совершать колебательное движение около положения равновесия.

Если же один из маятников отклонить из положения равновесия на угол α (второй при этом оставить в положении равновесия) и отпустить, то после столкновения маятников они начнут двигаться как одно целое и отклонятся от положения равновесия на угол β .

ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Два физических маятника, имеющие общую горизонтальную ось вращения образуют замкнутую систему в момент прохождения ими положения равновесия (в этом положении моменты сил тяжести равны нулю, а других моментов относительно оси вращения просто нет). Следовательно, при прохождении положения равновесия для этой системы выполняется закон сохранения момента импульса:

$$I_1 \bar{\omega}_1 + I_2 \bar{\omega}_2 = I_1 \bar{\omega}'_1 + I_2 \bar{\omega}'_2,$$

где I_1 и I_2 – моменты инерции маятников относительно оси вращения;

$\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ – их угловые скорости в положении равновесия до их соударения;

$\bar{\omega}'_1$ и $\bar{\omega}'_2$ – их угловые скорости после взаимодействия.

До взаимодействия второй маятник покоится ($\bar{\omega}_2 = 0$), а после взаимодействия оба маятника движутся как единое целое ($\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}'_2 = \omega$) и поэтому закон сохранения момента импульса в проекции на ось вращения принимает вид:

$$I_1 \omega_1 = (I_1 + I_2) \omega. \quad (1)$$

Моменты инерции маятников можно найти, зная их периоды колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

где l – расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Таким образом, момент инерции маятника 1

$$I_1 = \frac{m_1 g l_1 T_1^2}{4\pi^2} \text{ (без добавочного груза);} \quad (2)$$

$$I_{1\Gamma} = \frac{(m_1 + m_\Gamma) g l_{1\Gamma} T_{1\Gamma}^2}{4\pi^2} \text{ (с грузом),}$$

момент инерции системы из двух маятников

$$I_{12} = \frac{(m_1 + m_2) g l_{12} T_{12}^2}{4\pi^2} \text{ (без груза);} \quad (3)$$

$$I_{12\Gamma} = \frac{(m_1 + m_2 + m_\Gamma) g l_{12\Gamma} T_{12\Gamma}^2}{4\pi^2} \text{ (с грузом),}$$

где $l_{12}, l_{12\Gamma}$ – расстояние от оси до центра масс системы из двух маятников без дополнительного груза и с грузом;
 $T_{12}, T_{12\Gamma}$ – период колебания системы из двух маятников (без груза и с грузом).

При отклонении маятника от положения равновесия на угол α центр масс его поднимется на высоту (рис. 2) $h = l(1 - \cos \alpha)$.

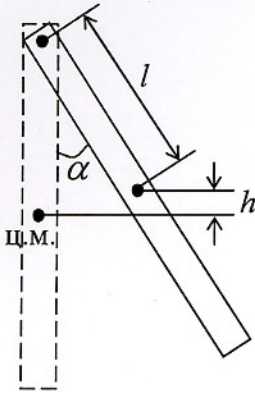


Рис. 2

Так как до взаимодействия и после взаимодействия на маятник действует только сила тяжести (консервативная), а момент силы сопротивления достаточно мал, из закона сохранения механической энергии

$$mgh = \frac{I\omega^2}{2}$$

можно найти угловую скорость маятника в момент прохождения положения равновесия:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgl(1 - \cos \alpha)}{I}},$$

где $\frac{I\omega^2}{2}$ – энергия колеблющегося маятника при прохождении положения равновесия,

mgh – энергия маятник, отклоненного на угол α (при этом его центр масс поднят на высоту h).

В наших опытах первоначально маятник 1 отклоняется от положения равновесия на угол α и, следовательно, его угловая скорость при прохождении положения равновесия (т.е. перед взаимодействием (столкновением) с маятником В)) :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2m \cdot gl_1(1 - \cos \alpha)}{I_1}} \quad (\text{без добавочного груза}); \quad (4)$$

$$\omega_{1\Gamma} = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_\Gamma)gl_{1\Gamma}(1 - \cos \alpha)}{I_{1\Gamma}}} \quad (\text{с грузом})$$

После столкновения система из двух маятников отклоняется на угол β , и следовательно, их начальная угловая скорость в положении равновесия :

$$\omega_{12} = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)gl_{12}(1 - \cos \beta)}{I_{12}}} \quad (\text{без добавочного груза}); \quad (5)$$

$$\omega_{12\Gamma} = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2 + m_\Gamma)gl_{12\Gamma}(1 - \cos \beta)}{I_{12\Gamma}}} \quad (\text{с грузом}).$$

З а д а н и е 1. Определение моментов импульсов и кинетической энергии маятников

1. С помощью винтов В (рис.1) установите маятники в свободном положении на нулевую отметку шкалы.

2. Измерьте расстояние l_1 , l_2 и l_Γ и запишите их значение в табл. 1. Запишите также значения m_1 , m_2 и m_Γ .

3. Рассчитайте расстояние от оси вращения до центра масс маятников $l_{1\Gamma}$, l_{12} и $l_{12\Gamma}$.

4. Отведите в сторону маятник 2, закрепите его. Определите время десяти колебаний t_1 маятника 1 и время 10 колебаний маятника 1 с добавочным грузом $t_{1\Gamma}$. Определите время 10 колебаний системы, состоящей из двух маятников, без дополнительного груза t_{12} и с грузом $t_{12\Gamma}$. Полученные значения занесите в табл.1.

5. Рассчитайте периоды колебаний T_1 , $T_{1\Gamma}$, T_{12} , $T_{12\Gamma}$ и моменты инерции маятников I_1 , $I_{1\Gamma}$, I_{12} , $I_{12\Gamma}$.

6. Отклоните маятник 1 (без груза) на угол α_1 (по указанию преподавателя) и запишите его значение в табл. 1. Маятник 2 при этом находится в положении равновесия. Опустите маятник 1 и отметьте угол β , на который отклонится

система из двух маятников после взаимодействия. Опыт повторите не менее 5 раз и рассчитайте среднее значение угла $\bar{\beta}$.

7. Повторите опыт (п.п. 6-7), прикрепив к маятнику 1 добавочный груз Г.
8. Рассчитайте угловые скорости маятников до взаимодействия ω_1 и после ω_{12} , $\omega_{1Г}$ и $\omega_{12Г}$.

Таблица 1

Опытные данные		Величина		Значение
		Расстояние до центра масс		
1		2		3
$m_1 =$,		системы		
$m_2 =$,		$l_{1Г} =$ _____		
$m_{Г} =$,		системы		
$l_1 =$,		$l_{12} =$ _____		
$l_2 =$,		системы		
$l_{Г} =$,		$l_{12Г} =$ _____		
N=10	$t_1 =$ с	$T_1 =$ с	Момент инерции	
	$t_{1Г} =$ с	$T_{1Г} =$ с		
	$t_{12} =$ с	$T_{12} =$ с	системы	
	$t_{12Г} =$ с	$T_{12Г} =$ с	$I_{1Г} =$ _____	
Без груза $\alpha_1 =$,		системы		
№	β_1 ,	$I_{12} =$ _____		
1		системы		
2		$I_{12Г} =$ _____		
3		системы		
4		$I_{12Г} =$ _____		
5		системы		
Среднее		Угловая скорость		

1		2	3
С грузом $\alpha_2 =$,			
№	β_2 ,	системы	
1		$\omega_{1\Gamma} = \sqrt{\quad}$	
2			
3		системы	
4		$\omega_{12} = \sqrt{\quad}$	
5			
Среднее		системы	
Проверьте: все ли обведенные графы заполнены		$\omega_{12\Gamma} = \sqrt{\quad}$	

9. Рассчитайте моменты импульсов и энергию маятников в первом и во втором опытах. Результаты занесите в табл. 2.

Таблица 2

Без груза	$I_1\omega_1$	$I_{12}\omega_{12}$	Отклонение	
			Δ	δ
С грузом	$I_{1\Gamma}\omega_{1\Gamma}$	$I_{12\Gamma}\omega_{12\Gamma}$	Отклонение	
			Δ	δ

10. Рассчитайте энергию маятников до и после взаимодействия. Рассчитайте коэффициент восстановления (см. работу № 1) для первого и второго случая и результаты занесите в табл. 3.

Таблица 3

Без груза	$0,5I_1\omega_1^2$	$0,5I_{12}\omega_{12}^2$	Коэффициент восстановления
С грузом	$0,5I_{1\Gamma}\omega_{1\Gamma}^2$	$0,5I_{12\Gamma}\omega_{12\Gamma}^2$	Коэффициент восстановления

11. Сделайте выводы.

Задание 2. Оценка погрешности измерений

В качестве систематической погрешности в данных опытах следует взять приборную погрешность, равную цене деления измерительного прибора.

Случайная погрешность определяется по разбросу выборки:

$$\Delta = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{2},$$

где x_{\max} и x_{\min} – максимальное и минимальное значения измеряемой величины в серии из N повторных измерений. Этой границе доверительного интервала соответствует доверительная вероятность

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$$

1. В табл. 4 занесите средние значения прямых измерений, выполненных в одном из упражнений и значения погрешностей этих величин – систематической и случайной.

2. Для каждой величины выберите наибольшую из погрешностей и рассчитайте наибольшую относительную погрешность δ измерения каждой величины.

В окончательном выводе следует отметить, для каких величин желательно увеличить (и как?) точность измерений, а для каких её можно и уменьшить без ущерба для конечного результата.

Таблица 4

Измеряемая величина		Абсолютная погрешность		Наибольшая из них	
обозначение	среднее значение	систематич. Δ_s	случайная Δ	абсолют. Δ	относит. δ
1	2	3	4	5	6
m_1 кг			—		
m_2 кг			—		
m_{Γ} кг			—		
l_1 м			—		
l_2 м			—		
l_{Γ} м			—		
t_1 с			—		
t_{12} с			—		
$t_{1\Gamma}$ с			—		
$t_{12\Gamma}$ с			—		

1	2	3	4	5	6
α_1			—		
α_2			—		
β_1					
β_2					

3. Погрешность измерения величины момента импульса и энергии в первом приближении можно считать равной (во всяком случае не выше) относительной погрешности менее точно измеренной величины (в табл.4). С учетом этого сделайте вывод о выполнении законов сохранения импульса и энергии в проведенных опытах и степени упругости ударов.

Контрольные вопросы

1. Что такое математический маятник ? физический маятник ?
2. От чего зависит период малых колебаний физического маятника ?
3. Что называется моментом импульса материальной точки, тела ?
Как направлен момент импульса?
4. Запишите закон сохранения момента импульса системы из двух маятников.
5. Как можно определить начальную скорость маятника до взаимодействия ?
Какие величины измеряют для этого ?
6. От каких величин зависит момент инерции маятника ? Как его изменяют в данной установке ?
7. Что такое центр масс ?
8. Как рассчитывают расстояние до центра масс системы из двух маятников ?
9. От чего зависит угловая скорость маятника перед взаимодействием ?
10. Чему равна энергия маятника :
перед взаимодействием ? после взаимодействия ?