

Занятие 4. Момент инерции тела

ЦЕЛЬ: расчёт и экспериментальное определение момента инерции тела.

Работа, которую совершает постоянный момент силы M при повороте тела на угол φ (в радианах),

$$A = M\varphi. \quad (1)$$

Работа сил трения или сопротивления равна изменению механической энергии системы:

$$A = W_1 - W_2. \quad (2)$$

Кинетическая энергия тела массой m , которое движется поступательно со скоростью v и одновременно вращается с угловой скоростью ω относительно центра масс,

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}. \quad (3)$$

Эта энергия равна кинетической энергии вращательного движения относительно мгновенной оси (МОВ):

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (4)$$

В этих формулах I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, I – момент инерции относительно МОВ.

Если эти оси параллельны друг другу, то согласно теореме Штейнера

$$I = I_c + ma^2, \quad (5)$$

где m – масса тел, a – расстояние между осями.

Формулы для расчета моментов инерции некоторых тел относительно их оси симметрии приведены в табл. 1.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

ЦЕЛЬ: приобрести навык расчёта момента инерции тел, состоящих из простых элементов.

1. Исследуйте форму тела. Приняв во внимание, что момент инерции любого тела равен сумме моментов инерции отдельных его элементов, мысленно разделите исследуемое тело на простые элементы, для которых формулы расчёта величины I_i даны в табл. 1.

2. Сделайте эскиз исследуемого тела, а если необходимо, то и его элементов, обозначая символами все размеры, подлежащие измерению. Например, тело (рис. 1а) состоит из насаженных на вал 1 шкива 2 и маховика 3 с двумя отверстиями 4. Это тело можно представить (рис. 1б) как совокупность трёх сплошных цилиндров 1, 2 и 3 за вычетом двух малых дисков 4, расположенных на месте отверстий маховика.

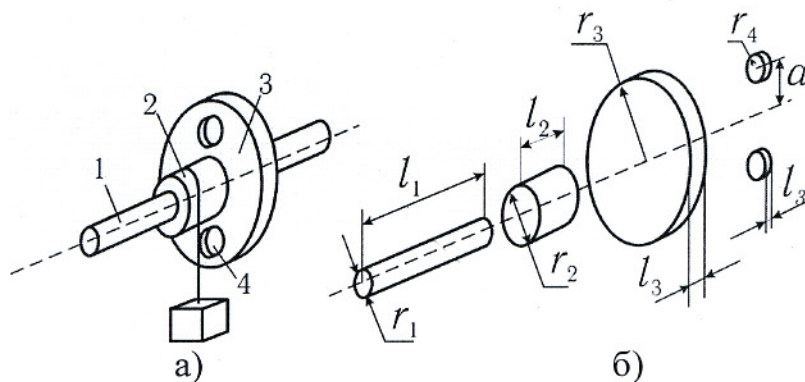


Рис. 1

Для расчёта момента инерции такого тела

$$I = I_1 + I_2 + I_3 - 2I_4 \quad (6)$$

необходимо знать массы указанных элементов, их радиусы, а также расстояние a от центра отверстий до оси вращения. В случае, если массы m_i неизвестны, то для их определения через плотность и объём деталей нужно измерить ещё их длины l_1 , l_2 и l_3 .

Таблица 1

№ п.п.	Элемент тела вращения	Масса m , кг	Диаметр d , мм, и a , мм	Момент инерции I , кг·м ²	
				формула	значение
1	Диск			$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$	
2	Вал–шкив			$I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$	
3	Ось			$I_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2$	
4а)	Кольцо			$I_4 = \frac{1}{2} m_4 (r^2 + R^2)$	
б)	Цилиндр			$I_4 = \frac{1}{2} m_4 r^2$	
в)	Шар			$I_4 = \frac{2}{5} m_4 r^2$	
г)	Стержень			$I_4 = \frac{1}{12} m_4 l^2$	
д)	Пластина		$(b \times d)$	$I_4 = \frac{1}{12} m_4 (b^2 + d^2)$	
	Тело	$m = \sum m_i =$	$a =$	$I_c = I_1 + I_2 + I_3 \pm nI_4$	
				$I_z = I_c + ma^2$	

Примечания:

- а) значения I_i и I_c даны относительно оси, проходящей через центр масс;
 - б) для стержня длиной l и пластины размером $b \times d$ значения I даны относительно оси, перпендикулярной их плоскости;
 - в) в формуле для I_c : n – число одинаковых элементов; знак «минус» для случая, если отверстия в диске имеют форму четвертого элемента.
3. Получите формулу вида (3.6) для расчёта момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс системы.
4. Запишите в табл. 1 массы m_i отдельных частей тела, а если они неизвестны, то плотность вещества ρ .
5. Измерьте линейкой или штангенциркулем (в отчёте объясните выбор инструмента) величины, необходимые для расчёта момента инерции каждого элемента тела. Результаты измерений записывайте в табл. 1.
6. Вычислите моменты инерции отдельных элементов, а затем момент инерции тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс.
7. Рассчитайте, если это необходимо в данной работе, момент инерции тела относительно МОВ, используя теорему Штейнера (3.5).

8. Оцените систематическую (приборную) погрешность прямых измерений (с. 7), сделанных для расчёта величины I . Результаты внесите в табл. 2.

Таблица 2

Измеряемый параметр	Величина	Систематическая погрешность Δ_S	Относительная погрешность δ
d_i			$(\delta = \Delta_S / d_i)$

9. В выводе оцените соотношение величин I_i частей тела. Какие из них пренебрежимо малы и по какой причине? По данным табл. 2 сделайте вывод о том, какие измерения проведены с достаточной точностью, а какие – нет; связано ли последнее с используемым инструментом?

Контрольные вопросы

1. Чему равна работа постоянного момента силы?
2. От каких величин зависит кинетическая энергия тела при поступательном и вращательном движениях?
3. Что характеризует момент инерции материальной точки, тела?
4. Чему равен момент инерции материальной точки?
5. Чему равен момент инерции твёрдого тела относительно оси?
6. В каких единицах измеряют момент инерции?
7. От каких величин зависит момент инерции тела?
8. Сформулируйте теорему Штейнера.
9. Чему равен момент инерции системы тел относительно какой-то оси?
10. Как рассчитывают момент инерции твёрдого тела сложной формы?

Работа № 5. Определение момента инерции тела, скатывающегося с наклонной поверхности

ЦЕЛЬ: определить момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения расчётным и экспериментальным методом

ОБОРУДОВАНИЕ: установка, набор тел, секундомер

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

В работе используются тела, осью которых является цилиндрический стержень радиусом r . Одно из тел 1 (рис. 1) помещают на параллельные направляющие 2, образующие с горизонтом углы α_1 и α_2 .

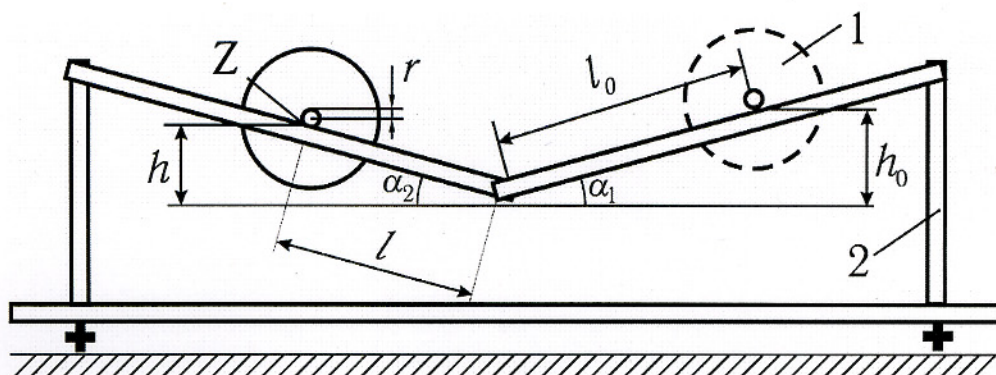


Рис. 1

Если тело отпустить, то оно, скатываясь, достигнет нижней точки и, двигаясь далее по инерции, поднимется вверх по направляющим. Движение тела, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях, называется плоским. Плоское движение можно представить двумя способами: либо как совокупность поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс; либо как только вращательное движение вокруг мгновенной оси вращения (МОВ), положение которой непрерывно изменяется. В нашем случае эта мгновенная ось Z проходит через точки касания направляющих с движущимся стержнем.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

При скатывании тело, опускаясь с высоты $h_0 = l_0 \sin \alpha_1 \cong l_0 \alpha_1$, проходит путь l_0 , а поднимаясь по инерции на высоту $h \cong l \alpha_2$, проходит путь l . В нижней точке скорость поступательного движения центра масс $v = 2l_0/t$, а угловая скорость тела

$$\omega = v/r = 2l_0/(r \cdot t), \quad (10)$$

где t – время движения от верхней точки до нижней, r – радиус стержня (оси).

На скатывающееся тело действует момент сил сопротивления $M_{\text{тр}}$. Работа его на пути l_0 равна $A = M_{\text{тр}} \varphi$, где угловой путь $\varphi = l_0/r$.

Закон сохранения энергии на отрезке пути l_0 имеет вид

$$mgh_0 = \frac{I\omega^2}{2} + M_{\text{тр}}\varphi, \quad (11)$$

где I – момент инерции скатывающегося тела относительно МОВ,
 m – масса тела, включающая в себя массу стержня.

При движении тела вниз с высоты h_0 и вкатывании его на высоту h работа сил сопротивления на пути $(l+l_0)$ равна убыли потенциальной энергии (см. (2)):

$$M_{\text{тр}} \frac{l_0 + l}{r} = mgh_0 - mgh. \quad (12)$$

Решая совместно (3.10)–(3.12), получаем формулу для определения момента инерции динамическим методом:

$$I = \frac{mglr^2(\alpha_1 + \alpha_2)t^2}{2l_0(l_0 + l)}. \quad (13)$$

Здесь величина $(\alpha_1 + \alpha_2)$ является константой для данной установки.

Момент инерции тела относительно МОВ определяется теоремой Штейнера

$$I = I_0 + ma^2,$$

где I_0 – момент инерции, относительно центра масс;

a – расстояние от центра масс тела до оси вращения (в этом опыте $a=r$).

З а д а н и е 1. Аналитический расчёт момента инерции тела

Для расчёта момента инерции маховика I необходимо измерить массу тела (написана на телах) или объём (массу рассчитать, используя плотность) и радиусы цилиндрических тел. Методика расчёта величины I дана на с. 39. В соответствии с ней результаты всех измерений и вычислений вносите в табл. 1.

Таблица 1

Индекс	Элемент тела вращения	Масса m , кг	Диаметр d , мм, и a , мм	Момент инерции I , кг·м ²	
				формула	значение
1	Диск			$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$	

Далее задание выполняется, как описано на с. 40.

Задание 2. Определение момента инерции тела динамическим методом

1. Определите массу m тела, запишите ее значение, а также постоянную установку ($\alpha_1 + \alpha_2$) в табл. 2.
2. Проверьте правильность положения установки. При скатывании тело не должно смещаться к одной из направляющих. Для регулировки используйте винты основания. Измерьте штангенциркулем диаметр d стержня в различных местах, определите его среднее значение и средний радиус r .
3. Установите тело на направляющие на расстоянии l_0 от нижней точки, за его положение фиксируется магнитом по нажатию кнопки «Сброс» секундомера.
4. Нажмите кнопку секундомера «Пуск». При этом электромагнит отключится и тело начинает двигаться. Когда тело достигнет нижней точки, секундомер автоматически выключится. Запишите время движения тела до нижней точки в табл. 2.
5. Наблюдая далее за движением тела по инерции, отметьте расстояние l , на которое оно поднимется до остановки.
6. Опыт повторите еще четыре раза при том же расстоянии l_0 , записывая результаты в табл. 2.

Таблица 2

№ п.п.	d , мм	t , с	l , м	$\alpha_1 + \alpha_2 =$ рад
1				$m =$ кг
...				$l_0 =$ м
5				$r = \frac{\bar{d}}{2} =$ м
Среднее значение				$I =$ кг·м ²

7. Найдите средние значения величин r , t , l и по формуле (3.13) рассчитайте момент инерции тела I относительно МОВ.

Задание 3. Изучение зависимости момента инерции от распределения массы относительно оси вращения

В этом задании используется тело в виде крестовины, по которой могут перемещаться грузы (цилиндры). Все результаты измерений заносятся в табл. 3.

1. Определите массу m тела и радиус r оси тела, и запишите постоянную установку ($\alpha_1 + \alpha_2$).
2. Установите подвижные цилиндры на равном расстоянии b от оси вращения и измерьте это расстояние.

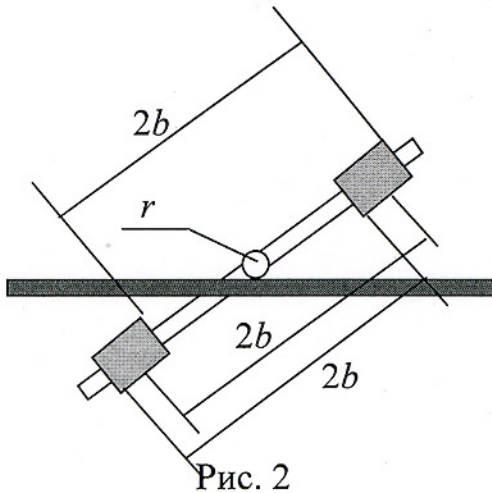


Рис. 2

Примечания.

1. Когда грузы находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения, тело должно находиться в безразличном положении равновесия на горизонтальных направляющих.

2. Так как цилиндры имеют одинаковый размер, расстояние между центрами грузов равно расстоянию между их торцами, которое можно измерить значительно точнее (рис. 2).

Таблица 3

№ п.п.	b	t	b^2	I	$\alpha_1 + \alpha_2 =$	рад.
1					$m =$	кг
2					$r =$	мм
3					$l_0 =$	м

3. Установите тело на направляющие на расстоянии l_0 от нижней точки, его положение фиксируется магнитом нажатием кнопки «Сброс» секундомера.

4. Нажмите кнопку секундомера «Пуск». При этом электромагнит отключится и тело начинает двигаться. Когда тело достигнет нижней точки, секундомер автоматически выключится. Запишите время движения тела до нижней точки в табл. 3.

5. Отметьте расстояние l , на которое продвинется тело, поднимаясь по инерции.

6. Повторите измерения пп. 3-5 при других расстояниях b цилиндров, относительно оси вращения.

7. Рассчитайте b^2 и момент инерции тела I (формула 3-13) для каждого опыта.

8. Постройте график зависимости (см. рекомендации построения и обработки графиков) $I = f(b^2)$ и по графику определите момент инерции крестовины $I_{кр}$ и массу m подвижных грузов.

9. Сделайте выводы.

З а д а н и е 4. Оценка погрешности измерений

В качестве **систематической погрешности** в данных опытах следует взять приборную погрешность, равную цене деления измерительного прибора.

Случайная погрешность определяется по разбросу выборки:

$$\Delta = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{2},$$

где x_{\max} и x_{\min} – максимальное и минимальное значение измеряемой величины в серии из N повторных измерений. Этой границе доверительного интервала соответствует доверительная вероятность

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$$

1. В табл. 4 занесите средние значения прямых измерений, выполненных в одном из упражнений и значения погрешностей этих величин – систематической и случайной.

2. Для каждой величины выберите наибольшую из погрешностей и рассчитайте наибольшую относительную погрешность δ измерения каждой величины. В окончательном выводе следует отметить для каких величин желательно увеличить (и как?) точность измерений, а для каких её можно и уменьшить без ущерба для конечного результата.

Таблица 4

ВЕЛИЧИНА		ПОГРЕШНОСТЬ			
		абсолютная		наибольшая	
название	значение	систематич.	случайная	абсолютная	относит.
$\alpha_1 + \alpha_2$	рад		—		
m	кг		—		
l_0	м		—		
l	м				
r	м				
t	с				

3. В качестве относительной погрешности результатов измерений примите наибольшую из погрешностей прямых измерений (см. табл. 2)

Контрольные вопросы

1. Укажите величины кинетической и потенциальной энергии при скатывании тела: в начале и в конце движения, в нижней точке и в произвольной точке.
2. Опишите характер движения тела по направляющим. Какая сила создаёт момент относительно оси вращения?
3. Как измеряют угловую скорость ω в данной работе?
4. Какие величины измеряют для определения скорости ω , момента сил трения, работы сил трения?
5. Какие уравнения лежат в основе динамических методов определения момента инерции?
6. Что составляет основу методики расчётного метода определения величины I ?
7. Укажите возможные источники случайных и систематических погрешностей при измерениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА, СКАТЫВАЮЩЕГОСЯ С НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Включить вилку «Секундомера» в розетку 220 в.
2. Включить клавишу «Сеть» на задней панели «Секундомера» (клавиша светится).
3. Позиционировать маховик на раме с помощью ограничителей и нажать кнопку включения электромагнита.
4. Нажать кнопку «пуск» на табло «Секундомера». «Секундомер» фиксирует время движения маховика до нижней точки.
5. Измерить по линейке путь маховика до его остановки.