

## Занятие 2. Закон сохранения импульса

Удар – кратковременное взаимодействие тел.

*Центральным* называют удар, при котором скорости взаимодействующих тел направлены вдоль прямой, соединяющей их центры масс.

*Абсолютно упругим* называют удар, при котором действуют лишь консервативные силы и поэтому *механическая* энергия системы взаимодействующих тел сохраняется.

*Абсолютно неупругим* называют удар, при котором после взаимодействия тела движутся как единое целое (с одной скоростью).

*Механическая система* – совокупность материальных тел, рассматриваемых как единое целое. Механическая система тел, на которую не действуют внешние тела, называется *замкнутой*.

*Импульс системы тел* равен векторной сумме импульсов  $\vec{p}_i$  всех  $N$  тел, входящих в систему:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i .$$

*Закон сохранения импульса (ЗСИ):* в замкнутой механической системе

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const} ,$$

ЗСИ для упругого центрального удара двух тел

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 ,$$

ЗСИ для неупругого центрального удара двух тел

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u} ,$$

где  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  – скорости тел непосредственно перед ударом;

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}$  – то же после удара.

*Коэффициент восстановления механической энергии  $k$*  – отношение кинетических энергий системы тел : после удара  $E_{\text{кон}}$  к энергии до удара  $E_{\text{нач}}$ :

$$k = E_{\text{кон}} / E_{\text{нач}} .$$

Он характеризует рассеяние механической энергии при ударе и зависит от упругих свойств взаимодействующих тел. Для абсолютно упругого удара  $k = 1$ , в реальных случаях  $k < 1$ .

## Работа № 2. Изучение закона сохранения импульса

ЦЕЛЬ: исследовать соударение тел, проверить выполнение законов сохранения импульса и энергии, оценить погрешность опытов.

ОБОРУДОВАНИЕ: специальная установка, набор тел (шайб), весы

### ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Установка состоит из горизонтально расположенного рабочего поля 3 (рис. 1) с нанесенной координатной сеткой, по которому перемещаются взаимодействующие тела 1 и 2. Начальную скорость телу 1 в направлении оси X сообщает ударный пружинный механизм 5. Перед выстрелом тело 1 фиксируется между направляющими 6. Ударный механизм снабжен винтом 4, изменяя положение которого можно изменять начальный импульс тела 1.

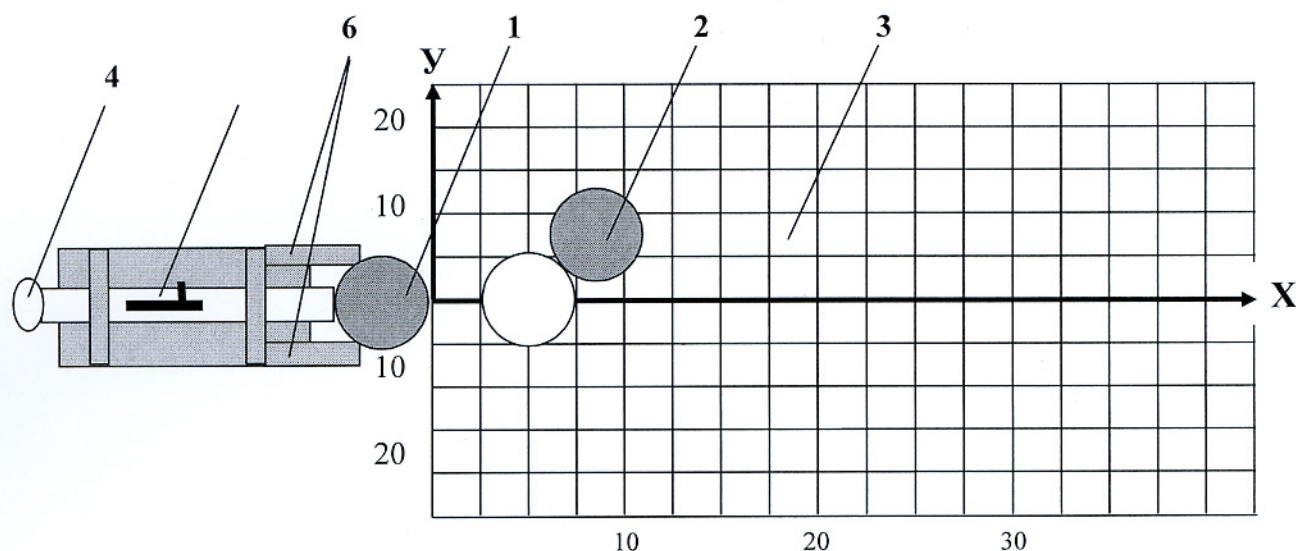


Рис. 1

### ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Боёк ударного пружинного механизма, ударяя по телу 1 (рис. 2), сообщает ему начальный импульс, значение которого перед взаимодействием тел

$$\vec{P}_0 = m_1 \vec{v}_0, \quad (1)$$

где  $m_1$  – масса первого тела,  
 $\vec{v}_0$  – начальная скорость тела.

Начальную скорость тела  $v_0$  можно оценить по длине пути  $l_0$ , пройденному телом по рабочему полю до остановки при свободном движении. Работа силы трения по определению равна  $A_{тр} = -\mu mgl$ . По теореме о кинетической энергии эта работа равна приращению энергии тела

$$A_{mp} = \Delta E = 0 - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (2)$$

Учитывая это, найдем начальную скорость тела

$$v_0 = \sqrt{2g\mu l_0}, \quad (3)$$

Следует отметить, что  $v_0$  - скорость шайбы в момент соударения, когда она находится на расстоянии  $l_0$  от точки, где оно остановится.

После взаимодействия тела начинают двигаться со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  соответственно.

Их суммарный импульс:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \quad (4)$$

где  $v_1 = \sqrt{2g\mu l_1}$  - скорость 1 тела после взаимодействия, (5)  
 $v_2 = \sqrt{2g\mu l_2}$  - скорость 2 тела после взаимодействия

$l_1, l_2$  - расстояния, проходимые телами после взаимодействия.

Длину пути  $l_0$  при свободном движении тела 1 (в отсутствие второго тела), а также после соударения  $l_1$  и  $l_2$ , определяют по изменению координат  $x$  и  $y$  крайних точек тел (рис. 2).

$$l_0 = \Delta x = x - x_{o1}$$

$$l_1 = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_{o1})^2 + (y_1 - y_{o1})^2} \quad (6)$$

$$l_2 = \sqrt{(\Delta x_2)^2 + (\Delta y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_{o2})^2 + (y_2 - y_{o2})^2}$$

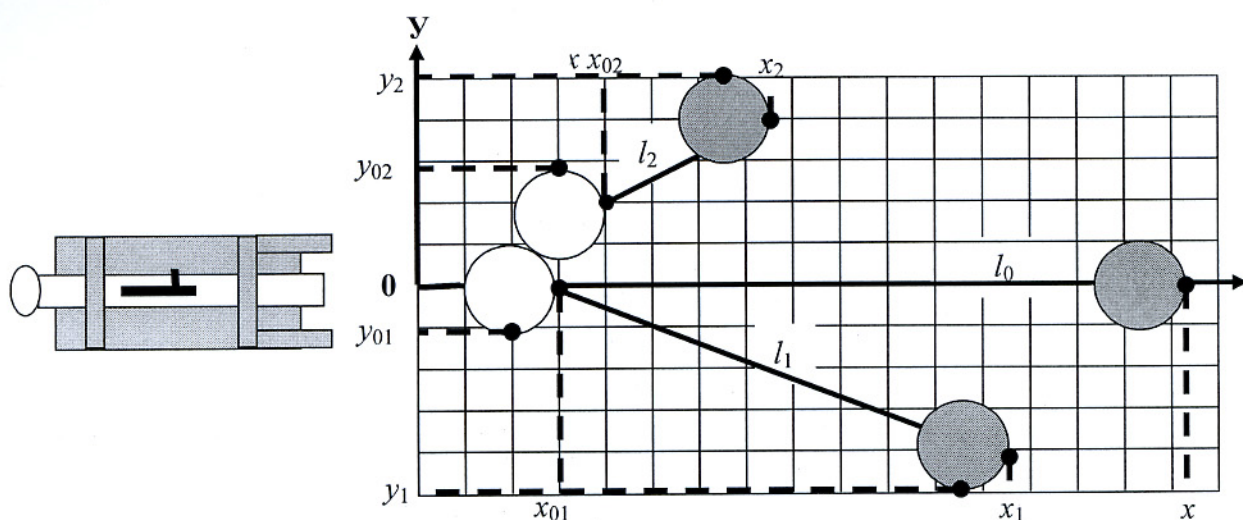


Рис. 2

В случае нецентрального удара, первое тело продолжит движение под углом  $\alpha$  к направлению оси X. При этом:

$$\sin \alpha = \frac{\Delta y_1}{l_1}, \quad \cos \alpha = \frac{\Delta x_1}{l_1}. \quad (7)$$

Второе тело начнет двигаться под углом  $\beta$  к оси X

$$\sin \beta = \frac{\Delta y_2}{l_2}, \quad \cos \beta = \frac{\Delta x_2}{l_2}. \quad (8)$$

Закон сохранения импульса в проекции на оси координат X и Y принимает вид:

$$\text{на ось X} \quad m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta,$$

$$\text{на ось Y} \quad 0 = m_1 v_1 \sin \alpha - m_2 v_2 \sin \beta.$$

С учетом (6)–(8) закон сохранения импульса принимает вид:

$$\text{на ось X(проекция)} \quad m_1 \sqrt{l_0} = \frac{m_1 \Delta x_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{m_2 \Delta x_2}{\sqrt{l_2}}, \quad (9)$$

$$\text{на ось Y(проекция)} \quad 0 = \frac{m_1 \Delta y_1}{\sqrt{l_1}} - \frac{m_2 \Delta y_2}{\sqrt{l_2}}.$$

До взаимодействия кинетическая энергия системы

$$E_{\text{нач}} = \frac{m_1 v_0^2}{2} = \mu m_1 g l_0, \quad (10)$$

а после взаимодействия энергия системы:

$$E_{\text{конеч}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \mu m_1 g l_1 + \mu m_1 g l_2. \quad (11)$$

При абсолютно упругом ударе энергия системы не меняется:

$$E_{\text{нач}} = E_{\text{конеч}},$$

$$\text{и коэффициент восстановления энергии} \quad k = \frac{E_{\text{конеч}}}{E_{\text{нач}}} = 1.$$

$$\text{При неабсолютно упругом ударе} \quad E_{\text{нач}} > E_{\text{конеч}},$$

$$\text{и коэффициент восстановления энергии} \quad k < 1. \quad (12)$$

### Задание 1. Сравнение импульсов и энергий до и после взаимодействия

1. Выберите два тела примерно одинаковой массы, определите её и запишите  $m_1$  и  $m_2$  в табл. 1.

2. Определите скорость тела 1 при свободном движении. Для этого взведите пружинный механизм, зафиксировав его в первом пазу. Шайбу 1 вставьте в направляющие до упора. Запишите её начальные координаты (см. рис. 2). Произведите выстрел и занесите в табл. 1 координату  $x$  крайней точки шайбы.

Таблица 1

Начальные координаты и массы тел	$m_1 =$ (кг)		$m_2 =$ (кг)		
	$x_{01} =$ (мм)		$x_{02} =$ (мм)		
	$y_{01} =$ (мм)		$y_{02} =$ (мм)		
Конечные координаты тел					
при свободном движении		после взаимодействия			
№ п.п.	$x$ , мм	$x_1$ , мм	$y_1$ , мм	$x_2$ , мм	$y_2$ , мм
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
Среднее	$\bar{x} =$	$\bar{x}_1 =$	$\bar{y}_1 =$	$\bar{x}_2 =$	$\bar{y}_2 =$
Приращение координаты $\Delta$	$\Delta x = \bar{x} - x_{01}$	$\Delta x_1 = \bar{x}_1 - x_{01}$	$\Delta y_1 = \bar{y}_1 - y_{01}$	$\Delta x_2 = \bar{x}_2 - x_{02}$	$\Delta y_2 = \bar{y}_2 - y_{02}$
Расстояние	$l_0 = \Delta x$	$l_1 = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2}$		$l_2 = \sqrt{(\Delta x_2)^2 + (\Delta y_2)^2}$	

3. При тех же условиях повторить опыт еще 6 раз. Результаты занесите в табл. 1 и рассчитайте среднее значение  $\bar{x}$  и расстояние  $\bar{l}_0$  (1).

4. Установите тело 1 в исходное положение. Тело 2 установите в одном из закрашенных кругов. Запишите начальные координаты крайних точек второго тела (рис. 2). Произведите выстрел и занесите в табл. 1 координаты крайних точек тел.

5. При тех же условиях повторите опыт еще 6 раз. Результаты занесите в табл. 1. Рассчитайте средние значения  $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2$ ; приращения координат  $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta x_2, \Delta y_2$  и перемещения тел  $\bar{l}_1$  и  $\bar{l}_2$ .

6. Рассчитайте по формуле (9) величины, пропорциональные проекциям импульсов тел на оси координат до и после соударения, и занесите результаты в табл.2.

Таблица 2

Импульс	До удара	После удара
Вдоль оси X	$m_1 \sqrt{l_0}$ , кг мм <sup>1/2</sup>	$m_1 \frac{\Delta x_1}{\sqrt{l_1}} + m_2 \frac{\Delta x_2}{\sqrt{l_2}}$ , кг мм <sup>1/2</sup>
Вдоль оси Y	0	$m_1 \frac{\Delta y_1}{\sqrt{l_1}} - m_2 \frac{\Delta y_2}{\sqrt{l_2}}$ , кг мм <sup>1/2</sup>

7. Сравните результаты и сделайте выводы.

8. Рассчитайте величины, пропорциональные энергиям до и после соударения (см. формулу (10 и 11)) и занесите результаты в табл. 3.

Таблица 3

Энергия	До удара	После удара
	$m_1 l_0$ , кг мм	$m_1 l_1 + m_2 l_2$ , кг мм
Коэффициент восстановления	$\frac{[m_1 l_1 + m_2 l_2]}{m_1 l_0} =$	

9. Сделайте выводы.

10. Повторите опыт по пп. 1–9 для тел разной массы. Результаты занесите в таблицы, аналогичные табл. 1–3.

## З а д а н и е 2. Простейшая оценка погрешности измерений

В качестве **систематической погрешности** в данных опытах следует взять приборную погрешность, равную цене деления измерительного прибора.

**Случайная погрешность** определяется по разбросу выборки:

$$\Delta_x = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{2},$$

где  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  – максимальное и минимальное значение измеряемой величины в серии из  $N$  повторных измерений. Этой границе доверительного интервала, совпадающего с  $\Delta$ , соответствует доверительная вероятность

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$$

1. В табл. 4 занесите средние значения прямых измерений, выполненных в одном из упражнений и значения погрешностей этих величин – систематической и случайной.

Таблица 4

Величина	Значение	Абсолютная погрешность		Наибольшая из них	
		систематич. $\Delta_s$	случайная $\Delta$	абсолют. $\Delta$	относит. $\delta$
$m_1$ (кг)			—		
$m_2$ (кг)			—		
$x_{01}$ (мм)			—		
$y_{01}$ (мм)			—		
$x_{02}$ (мм)			—		
$y_{02}$ (мм)			—		
$x_1$ (мм)					
$y_1$ (мм)					
$x_2$ (мм)					
$y_2$ (мм)					

2. Для каждой величины выберите наибольшую из погрешностей, рассчитанных в п. 1 и определите наибольшую относительную погрешность  $\delta$  измерения каждой величины. В окончательном выводе следует отметить для каких величин желательно увеличить (и как?) точность измерений, а для каких её можно и уменьшить без ущерба для конечного результата.

3. Погрешность измерения величины импульса и энергии в первом приближении можно считать равной (во всяком случае не выше) относительной погрешности менее точно измеренной величины (в табл. 4). С учетом этого сделайте вывод о выполнении законов сохранения импульса и энергии либо о причинах их невыполнении в проведенных опытах и степени упругости ударов.

### Контрольные вопросы

1. Как записывают ЗСИ: а) для замкнутой механической системы; б) при упругом центральном ударе двух тел; в) при неупругом центральном ударе?
2. Как записывают закон сохранения механической энергии (ЗСМЭ) при упругом центральном ударе двух тел?
3. В каких ударах выполняются: а) ЗСМЭ; б) ЗСИ; в) оба закона?
4. Почему соударяющиеся шайбы можно считать замкнутой системой?
5. Как записывают ЗСИ при измерениях в упругом и неупругом ударах?
6. Какие прямые измерения необходимо сделать в работе для проверки выполнения ЗСИ?
7. От каких величин зависит: а) скорость ударяющего тела; б) импульс и скорость тел после неупругого удара?
8. Какой удар называется центральным?
9. Какой удар называется нецентральным?
10. От чего зависит направление движения тел после нецентрального удара?