

Общий физический практикум. Задача «Маятник Максвелла»

Цель работы: **Изучение законов динамики вращательного движения. Экспериментальное определение момента инерции диска с помощью маятника Максвелла.**

I. ВВЕДЕНИЕ

Маятник Максвелла – это устройство, состоящее из массивного диска, симметрично и жестко закрепленного на горизонтальной оси, подвешенной на двух нерастяжимых нитях. Выведенный из состояния равновесия маятник может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. Маятник состоит из легкой оси, на которой симметрично закреплен массивный диск. На концах оси закреплена нерастяжимая нить, проходящая через отверстия на верхней части штатива. В центре верхней части установки расположен регулировочный винт, с помощью которого можно регулировать положение оси в пространстве. В положении равновесия нити полностью размотаны, ось находится в горизонтальном положении. Для вывода маятника Максвелла из положения равновесия нити аккуратно наматываются на ось от концов к середине. Необходимо наматывать нити виток к витку для обеспечения равномерного разматывания и сохранения горизонтальности оси в процессе движения маятника. В верхнем положении маятник фиксируется с помощью электромагнитов. После отключения питания электромагнитов, под действием момента силы тяжести нити начинают разматываться, и маятник начинает движение. Движение маятника состоит из поступательного движения вниз и вращательного – вокруг оси симметрии. Под действием момента сил тяжести движения продолжается до полного разматывания нитей. После этого, очевидно, продолжение поступательного движения вниз невозможно, однако вращение продолжается по инерции. Это приводит к повторному наматыванию нитей на ось. В результате маятник вновь поднимается. По достижении высшей точки процесс повторяется. Периодичность этого процесса дает основания называть описанный прибор маятником.

Пусть теперь маятник имеет идеальную форму и лишен различных дефектов. Другими словами, два положения маятника, отличающиеся одно от другого только поворотом вокруг его продольной оси неотличимы друг от друга. Тогда, для описания движения маятника Максвелла необходимо и достаточно иметь в своем распоряжении всего одну координатную ось. Если в кинематике, вопрос о координатах материальной точки достаточно очевиден, то в динамике дело обстоит несколько сложнее. Для твердого тела удобно пользоваться точкой, в которой находится его центр масс. Это значит, что для маятника Максвелла применима теорема о движении центра масс.

В то же время, движение маятника Максвелла является примером плоского движения. Плоское движение твердого тела (*движение, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости называется плоским*) может быть представлено в виде движения некоторой неизменяемой двумерной фигуры в ее плоскости, при чем это движение должно являться суперпозицией поступательного движения какой-либо точки этой фигуры и вращения ее вокруг оси, проходящей через эту точку и перпендикулярной плоскости фигуры. Опять же, удобно использовать в качестве такой точки центр масс рассматриваемого тела.

Основываясь на сказанном можно выделить три основных этапа движения маятника, а именно: спуск, удар и подъем. В соответствии с этим, силы, действующие на маятник, должны быть подразделены на силы длительного действия (при спуске и подъеме) и силы кратковременного действия (удар). В первом случае эти силы не изменяются во времени, во втором – они резко нарастают и убывают. Отметим, что удар при опускании маятника отличается удара при столкновении двух тел. Во втором случае большая часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию тел, в то время как при ударе маятника Максвелла кинетическая энергия его вращения полностью сохраняется

неизменной. При этом энергия вращения гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом.

Ознакомление с движением маятника Максвелла в задаче состоит в наблюдении его движения, которое, как уже было сказано, состоит из трех стадий: спуска, удара и подъема. Каждая из этих стадий рассматривается отдельно.

Перейдем теперь непосредственно к описанию движения маятника. Напомним, что для описания будет использоваться теорема о движении центра масс.

Уравнения движения маятника без учета сил трения имеют вид:

$$\begin{cases} ma = mg - 2T \\ J\varepsilon = 2TR_0 \\ a = \varepsilon \cdot R_0 \end{cases} \quad (1)$$

где m - масса маятника, J - момент инерции маятника, g - ускорение свободного падения. R_0 - радиус стержня, T - сила натяжения одной нити, a - ускорение поступательного движения центра масс маятника, ε - угловое ускорение маятника. Решая систему уравнений (1) относительно ускорения и момента инерции маятника имеем:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{J}{mR_0^2}} \quad (2)$$

$$J = mR_0^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) \quad (3)$$

Поскольку момент инерции маятника можно представить в виде $J = KmR_D^2$, где R_D - радиус диска и безразмерный коэффициент $K \sim 1/2$, величина $\frac{J}{mR_0^2} = K \left(\frac{R_D}{R_0} \right)^2$ (радиус диска R_D много больше радиуса стержня R_0) и ускорение маятника $a \ll g$, а сила натяжения нитей

$$2T = m(g - a) \quad (4)$$

близка к весу маятника mg . Так как при равноускоренном движении (I стадия - опускание маятника)

$$a_1 = \frac{2h_1}{t_1^2} \quad (5)$$

где t_1 - время опускания маятника, h_1 - расстояние, которое он проходит за это время, то для экспериментального определения момента инерции маятника из (3) и (5) получаем формулу:

$$J = mR_0^2 \left(\frac{gt_1^2}{2h_1} - 1 \right) \quad (6)$$

Для скорости опускания центра масс маятника непосредственно перед его ударом имеем

$$v_1 = at_1 = \frac{2h_1}{t_1} \quad (7)$$

После удара при подъеме маятника вверх (III стадия) он движется равнозамедленно с ускорением a , направленным так же, как при его опускании вниз. Скорость движения центра масс маятника при подъеме определяется уравнением:

$$v = v_2 - at$$

где v_2 - начальная скорость движения маятника вверх, t - время от начала этого движения. Появление этой скорости обусловлено продолжающимся по инерции вращением маятника в нижней точке его траектории. При этом вращении наматывание нитей на стержень маятника и приводит к его подъему.

Пусть время подъема маятника до его полной остановки в верхней точке равно t_2 , тогда для величины начальной скорости имеем:

$$v_2 = at_2 = \frac{2h_2}{t_2} \quad (8)$$

так как величина ускорения при подъеме маятника связана с расстоянием h_2 , которое проходит его ось до остановки, таким же соотношением, как и при спуске:

$$a_2 = \frac{2h_2}{t_2^2} \quad (9)$$

Момент инерции маятника J определяем по формуле:

$$J = J_0 + J_d + J_k \quad (10)$$

Момент инерции оси маятника J_0 определяем по формуле:

$$J_0 = \frac{m_0 R_0^2}{2} \quad (11)$$

где R_0 - радиус оси; m_0 - масса оси;

Момент инерции диска маятника J_d определяем по формуле:

$$J_d = \frac{m_d R_d^2}{2} \quad (12)$$

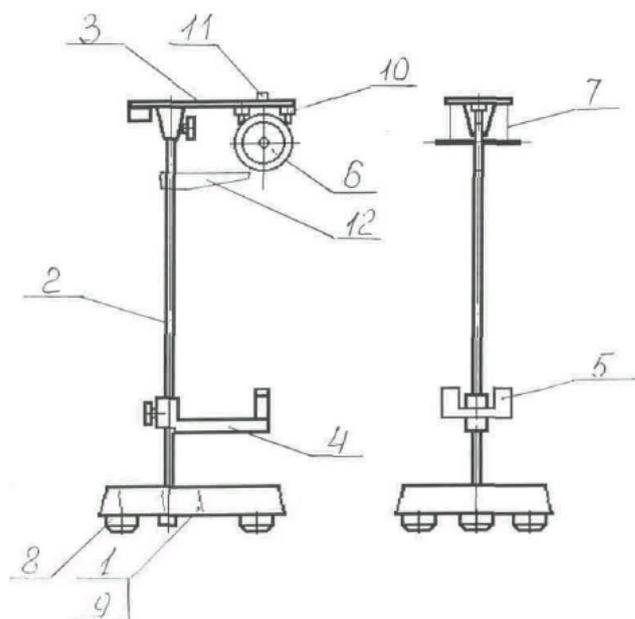
где R_d - радиус диска; m_d - масса диска.

Момент инерции кольца маятника J_k определяем по формуле:

$$J_k = m_k \left(R_k^2 + \frac{b^2}{4} \right) \quad (13)$$

где R_k - средний радиус кольца; m_k - масса кольца, кг; b - ширина кольца, м.

II. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ



Установка представлена на рисунке и включает в свой состав: основание 1, вертикальную стойку 2, верхний кронштейн 3, кронштейн 4 для установки фотодатчика, фото датчик 5, диск 6 с осью, подвешенной на двух нитях 7, комплект из трех сменных колец с различными моментами инерции. Основание 1 снабжено тремя регулируемыми опорами 8 и зажимом 9 для фиксации вертикальной стойки 2. Вертикальная стойка 2 выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала, и имеет визир 12. На верхнем кронштейне 3 размещаются электромагниты 10 и узел 11 регулировки исходного положения маятника. Кронштейн 4 имеет зажим для крепления на вертикальной стойке 2 и элементы фиксации фотодатчика.

3				
4				
5				

При проведении измерений следует строго следить за правильностью положения оси маятника, избегать перекосов и срывов оси с нитями. Если в ходе эксперимента нити стали наматываться на ось с перехлестом или наоборот слишком разреженно, следует немедленно прекратить эксперимент. Необходимо помнить, что поврежденный маятник (с погнутой осью) не может быть использован в работе.

2. Обработка результатов

Величины $h_{1,2}$ и $t_{1,2}$ являются результатами прямых измерений, поэтому за оценку истинного значения измеряемой величины принимается выборочное среднее значение (среднее арифметическое по данной выборке). Выборка - число испытаний, в нашем случае $n=5$.

1. Провести вычисление средних значений $\langle h_j \rangle$ и $\langle t_j \rangle$ ($j=1,2$) по формулам:

$$\langle h_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{ij}$$

$$\langle t_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{ij}$$

Результаты вычислений занести в табл. 1.

2. Провести оценку ошибок измеренных величин. В качестве оценки случайной погрешности среднего значения принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$S_{h_j} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (h_{ij} - \langle h_j \rangle)^2}$$

$$S_{t_j} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (t_{ij} - \langle t_j \rangle)^2}$$

С учетом систематических погрешностей $\sigma_{\text{сист.}}$ (погрешность прибора, погрешность округления и др.) величина стандартного отклонения суммарной погрешности физических величин h_j и t_j вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{h_j} = \sqrt{S_{h_j}^2 + \sigma_{h_j, \text{сист.}}^2}$$

$$\sigma_{t_j} = \sqrt{S_{t_j}^2 + \sigma_{t_j, \text{сист.}}^2}$$

где S — выборочное стандартное отклонение среднего арифметического, $\sigma_{\text{сист.}}$ - оценка суммарной систематической погрешности.

Полученные оценки погрешностей σ средних значений t_1 , t_2 , h_1 и h_2 также заносятся в табл. 1.

3. Величины ускорений маятника при спуске a_1 и подъеме a_2 находят по формулам (5) и (9). Затем по формулам (7) и (8) определяют величины скоростей маятника до и после удара, v_1 и v_2 , и коэффициент восстановления скорости $K_B = v_1/v_2$.

4. Провести оценку ошибок полученных величин по формулам для косвенных измерений:

$$\sigma_{a_j} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial a_j}{\partial h_j} \right) \right)_{\langle t_j \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle h_j \rangle}^2 + \left(\left(\frac{\partial a_j}{\partial t_j} \right) \right)_{\langle h_j \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle t_j \rangle}^2}$$

$$\sigma_{v_j} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_j}{\partial h_j}\right)_{\langle t_j \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle h_j \rangle}^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial t_j}\right)_{\langle h_j \rangle}^2 \sigma_{\langle t_j \rangle}^2}$$

$$\sigma_{v_j} = \sqrt{\left(\frac{\partial K_B}{\partial v_1}\right)_{\langle v_2 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle v_1 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial K_B}{\partial v_2}\right)_{\langle v_1 \rangle}^2 \sigma_{\langle v_2 \rangle}^2}$$

В соответствии с формулой (2), значения ускорений при спуске и подъеме маятника должны быть одинаковыми. Проверить совпадение ускорений a_1 и a_2 в пределах ошибок измерений.

Упражнение 2. Определение момента инерции маятника Максвелла.

1. С помощью формулы (6) провести вычисление момента инерции маятника Максвелла J .

2. Провести оценку ошибок полученного результата по формуле:

$$\sigma_J = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial h_1}\right)_{\langle t_1 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle h_1 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial t_1}\right)_{\langle h_1 \rangle}^2 \sigma_{\langle t_1 \rangle}^2}$$

3. Используя данные о геометрических размерах маятника и плотностях материалов, из которых он изготовлен, рассчитать теоретическое значение момента инерции $J_{\text{теор}}$.

Момент инерции маятника Максвелла складывается из моментов инерции стержня и диска. Таким образом, суммарный момент инерции системы относительно продольной оси имеет вид:

$$J_{\text{теор}} = m_1 r^2 / 2 + m_2 R^2 / 2 + m_3 (r')^2 / 2,$$

где r - радиуса стержня; R - радиус диска; r' - радиус утолщений на стержне; m_1, m_2, m_3 - массы стержня, диска и утолщений на стержне, соответственно. Массы различных частей маятника вычисляются исходя из их геометрических размеров и плотностей материалов, из которых они изготовлены.

4. Оценить погрешности полученного результата расчета $J_{\text{теор}}$, используя формулы для оценки погрешностей в случае косвенных измерений.

5. Сравнить экспериментальное значение момента инерции с расчетным.

Основные итоги работы: в результате выполнения работы должны быть определены значения скоростей и ускорений маятника Максвелла на двух различных стадиях его движения (спуск и подъем). Кроме того, должен быть вычислен момент инерции маятника, экспериментально и теоретически, и проведено сравнение полученных результатов.

IV. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте определение плоского движения.
2. Что такое центр масс системы? Сформулируйте теорему о движении центра масс.
3. Дать определение момента инерции твердого тела.
4. Описать маятник Максвелла. Что является главным отличительным признаком маятника Максвелла? Почему это устройство называется маятником?
5. Как изменяется кинетическая энергия системы в момент удара?
6. Получить выражение для момента инерции диска, кольца. Получите формулу для вычисления теоретического значения момента инерции маятника Максвелла.
7. Сформулируйте закон изменения импульса.
8. Сформулируйте закон изменения механической энергии.
9. Какое движение твердого тела называется плоским ?
10. Как изменится ускорение и сила при увеличении момента инерции маятника?