

где J_0 — момент инерции маятника относительно центра масс (см. (8.1)), a — расстояние от центра масс до точки подвеса, m — масса маятника.

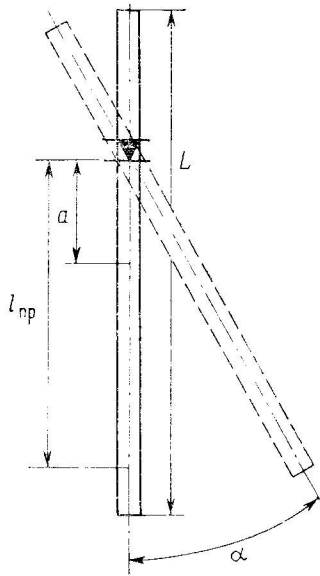


Рис. 8.2

Момент инерции однородного стержня относительно центра масс будет $J_0 = mL^2/12 = ma_0^2$, где a_0 — радиус инерции, и вместо (1) можно записать

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2}{12ag} + \frac{a}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_0^2 + a^2}{ag}}. \quad (2)$$

Нашему физическому маятнику можно сопоставить такой математический маятник, чтобы их периоды совпадали. При этом (см. введение) длина математического маятника равна приведенной длине $l_{пр}$ физического маятника, причем

$$l_{пр} = \frac{a_0^2 + a^2}{a} = \frac{a_0^2}{a} + a, \quad (3)$$

а период его будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}. \quad (4)$$

Точка физического маятника, расположенная на расстоянии $l_{пр}$ от точки подвеса на прямой, проходящей через центр тяжести,

называется центром качания. Центр качания и точка подвеса взаимно обратимы, т. е. если их поменять местами, период колебания физического маятника не изменится.

Как видно из (4), величина периода колебаний исследуемого маятника определяется величиной $l_{пр}$, которая (3) является сложной функцией a . Из анализа этой функции на экстремумы следует, что ее минимум будет при $a = a_0$ ($(l_{пр})_{мин} \rightarrow 2a_0$), а максимум будет при $a \rightarrow 0$ ($(l_{пр}) \rightarrow \infty$). При $a = 0$ маятник будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

Рассмотренная теория физического маятника является приближенной. В ней сделан ряд допущений, которые нуждаются в дополнительном анализе.

Первое из них заключается в использовании приближения малых амплитуд, т. е. $\sin \alpha \approx \alpha$. Если использовать следующий член в разложении $\sin \alpha = \alpha - (1/3)\alpha^3 + \dots$, то период колебания маятника будет зависеть от амплитуды. Заранее указать величину амплитуды, при которой можно пользоваться линейным приближением (8.14), невозможно, так как критерий выбора зависит от точности метода измерения периода.

Второе допущение заключается в пренебрежении в (8.14) моментом сил трения. В правомочности такого допущения можно убедиться, оценив декремент затухания маятника (см. гл. XII). Действительно, для установок, используемых в лабораторной работе, маятник совершает более $N = 100$ колебаний, пока его амплитуда не уменьшится в e (~ 3) раз. В этом случае относительное изменение периода колебаний за счет сил трения будет $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{4\pi^2 N^2} \approx 10^{-6}$, и этой величиной можно пренебречь.

Третье допущение заключается в пренебрежении массой подвижной шайбы с опорными призмами по сравнению с массой самого стержня. Учет этой массы приводит к тому, что центр тяжести маятника не будет совпадать с геометрическим центром стержня и его положение будет меняться при изменении точки подвеса a . Правомочность этого допущения проверяется экспериментально по отклонению полученных результатов от результатов, рассчитанных по приведенной выше упрощенной теории.

Измерения. 1. Опорную призму укрепляют на конце маятника на крайнем делении шкалы. Устанавливают диапазон амплитуд, в пределах которого период колебания маятника можно считать независимым от амплитуды. Для этого отклоняют маятник примерно на 15° и измеряют при помощи фотоэлектрической системы период его колебания. Затем постепенно уменьшают амплитуду до тех пор, пока измеряемые периоды колебаний перестанут отличаться друг от друга в пределах случайных ошибок эксперимента.

2. Исследование зависимости периода колебаний T от величины a . После получения экспериментальной зависимости строят график зависимости $a \cdot T^2$ от величины a^2 . Методом наименьших

квадратов аппроксимируют полученную зависимость прямой линии и находят из графика величины a_0^2 и $4\pi^2 a_0^2/g$. Вычисляют значение a_0 и сравнивают его с определенным из непосредственных измерений $a_0 = L/\sqrt{12}$. Вычисляют значение g и сравнивают его с табличным значением.

3. Для 2—3 значений a вычисляют значение $l_{пр}$ и на опыте проверяют обратимость точки подвеса и точки качания.

Литература: [1] — § 21, 34; [2] — § 41; [3] — § 90.

Лабораторная работа 3

Определение ускорения свободного падения при помощи обратного маятника (метод Бесселя)

Точное измерение периода колебаний любого физического маятника позволяет в принципе определить ускорение свободного падения g в любой точке земного шара. Эти методы определения g основаны на зависимости периода колебаний T от g по формуле (см. Введение (8.12) — (8.18))

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}, \quad (1)$$

где T — период колебания маятника, J — момент инерции маятника относительно точки подвеса маятника, J_0 — момент инерции маятника относительно центра масс (см. теорему Гюйгенса—Штейнера), a — расстояние от центра масс до точки подвеса, m — масса маятника.

Если использование произвольных физических маятников удобно для определения вариаций g , т. е. нахождения отношений значений g в различных точках поля тяготения, то при определении самого значения g возникает трудность точного определения момента инерции маятника.

Это затруднение исключено в методе обратного маятника, в котором из расчетных формул исключается величина момента инерции маятника J_0 .

Этот метод основан на известном свойстве двух точек физического маятника, точки подвеса и точки качания, при последовательном подвешивании маятника в которых его период остается неизменным. Расстояние между этими точками определяется приведенной длиной физического маятника $l_{пр}$.

Таким образом, если у физического маятника найдены две сопряженные точки, когда периоды колебаний на них T_1 и T_2 точно совпадают, то для определения g необходимо точно измерить $T_0 = T_1 = T_2$ и $l_{пр}$, равное расстоянию между этими точками

$$g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} l_{пр}. \quad (2)$$

Однако экспериментально найти эти точки с необходимой точностью достаточно сложно, и практически всегда $T_1 \neq T_2$.

В этом случае

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_1^2}{mga_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_2^2}{mga_2}}. \quad (3)$$

Из (3) легко получить

$$T_1^2 ga_1 - T_2^2 ga_2 = 4\pi^2 (a_1^2 - a_2^2),$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2} = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2}, \quad (4)$$

где $L = a_1 + a_2$, а

$$T_0^2 = \frac{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}{a_1 - a_2} = T_1^2 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} (T_1^2 - T_2^2). \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что ошибка в измерении g будет минимальной, тогда T_1 и T_2 близки друг к другу, а значения a_1 и a_2 существенно отличаются друг от друга.

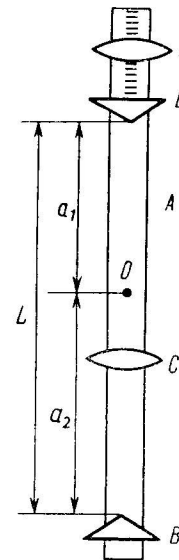


Рис. 8.3

В данной работе используется обратный маятник, изображенный на рис. 8.3. На металлическом стержне A опорные призмы B жестко закреплены и не перемещаются. Расстояние между ними