Математический анализ (1-й семестр)

для факультета фундаментальной физико-химической инженерии

Программа курса (вопросы к экзамену[1])

2018/19 уч. год

Часть I

1. Доказательство по индукции. Неравенство Бернулли и его следствия.

2. Отображения произвольных множеств-I: отображение, сюръекция, инъекция, биекция, образ и прообраз элемента и множества.

3. Отображения произвольных множеств-II: отображение, композиция отображений, тождественное и обратное отображения, сужение отображения.

4. Числовые функции: ограниченные, монотонные и строго монотонные функции. Параметрическое задание функции. Числовые последовательности.

5. Непрерывность функции в точке. Непрерывность $|x|$, линейной функции и $\sqrt{x}$.

6. Неравенства $|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$. Непрерывность синуса, косинуса и арктангенса.

7. Предел функции-I: определения и примеры (в точке и в $\pm\infty$), единственность предела, локальность предела. Связь между непрерывностью и пределом.

8. Предел функции-II: определения и примеры (в точке и в $\pm\infty$), локальные свойства ограниченности и сохранения неравенства. Локальные свойства ограниченности и сохранения знака для непрерывных функций.

9. Предел, равный $\pm\infty$. Перестановочность предельного перехода и непрерывной функции. Непрерывность композиции непрерывных функций. *Предел композиции функций (замена переменной в пределе).*

10. Бесконечно малые функции (бмф). Связь между пределом функции и бесконечно малыми. Сумма бмф, произведение бмф и ограниченной функции, *связь бмф с бесконечно большими функциями.*

11. Предел суммы, произведения и *частного.* Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность многочленов, рациональных функций, арксинуса.

12. *Предельный переход в неравенстве (монотонность предела).* Теорема о зажатой переменной (оценочный признак существования предела). Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

---

[1] *Курсив означает необязательность знания соответствующих доказательств.*

В билет входят: вопрос из части I, вопрос из части II, задачи.

13. Односторонние пределы и односторонняя непрерывность функции: определения и примеры. Связь с обычными (двусторонними) пределом и непрерывностью.

14. Верхние и нижние грани числовых множеств. Точная верхняя и точная нижняя грани (супремум и инфимум). Критерий точной верхней грани. Специфическая аксиома множества действительных чисел — принцип полноты Вейерштрасса.

15. Предел последовательности. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ при различных $q \in \mathbb{R}$. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. *Определение показательной функции* $\exp x$ *как предела последовательности.* Число e.

16. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$ и связанные с ним пределы: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ и $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(1+x\right)^p - 1}{x} = p$. Непрерывность показательной функции.

17. Сравнение бесконечно малых-I: O-большое, эквивалентность функций, её свойства и применение в вычислении пределов. Запись замечательных пределов в форме эквивалентностей.

18. Сравнение бесконечно малых-II: o-малое, *его свойства.* Метод выделения главной части и его применение в вычислении пределов. Запись замечательных пределов в форме равенств с o.

19. Асимптоты графика функции. Критерий существования асимптоты и формулы для её коэффициентов.

Часть II[2]

1. Подпоследовательность. Сходимость подпоследовательности к пределу последовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

2. Частичные пределы последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности, их связь с её пределом.

3. Фундаментальные последовательности. Фундаментальность сходящейся последовательности. Ограниченность фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Пример: расходимость последовательности $a_n \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

4. *Эквивалентное определение предела функции* (*по Гейне*). *Критерий Коши существования предела функции.*

5. Функции, непрерывные на отрезке, их свойства (глобальные свойства непрерывных функций): *ограниченность*, достижение наибольшего и наименьшего значений, *принятие промежуточных значений*; непрерывный образ отрезка.

6. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

7. Производная функции в точке. Производные некоторых элементарных функций: постоянной, x, x^2, синуса, показательной, логарифмической, общей степенной. Односторонние производные.

8. Дифференцируемость функции в точке, её равносильность существованию конечной производной; дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции, недостаточность непрерывности для дифференцируемости.

9. Касательная к кривой, её уравнение. Геометрический смысл производной и дифференциала.

10. Линейность операции дифференцирования, дифференцирование произведения *и частного*. Дифференцирование композиции функций.

11. *Дифференцирование обратной функции.* Производные арктангенса и арксинуса. Дифференцирование параметрически заданной функции. Касательный вектор и нормальный вектор (нормаль) к кривой.

12. Производные высших порядков. Дифференцируемость n раз и бесконечная дифференцируемость, семейства $C^n[a;b]$ и $C^\infty[a;b]$. *Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций.*

13. Локальные экстремумы. Необходимое условие локального экстремума. Теорема Ролля.

[2] Вопросы и задачи по числовым рядам войдут в программу следующего семестра.

14. Теоремы Лагранжа *и Коши*, их геометрический смысл, существенность условий непрерывности и дифференцируемости.

15. Критерий постоянства дифференцируемой функции. Достаточное условие строгой монотонности и *критерий монотонности.* Достаточное условие экстремума по знаку первой производной.

16. Выпуклость дифференцируемой функции, точка перегиба. *Достаточное условие выпуклости. Взаимное расположение графика выпуклой функции на интервале и соответствующей хорды.* Неравенство $\sin x > 2x/\pi$ при $0 < x < \pi/2$.

17. Многочлен Тейлора. Локальная формула Тейлора. *Единственность такого представления.*

18. Представление формулой Тейлора функций $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$. Достаточные условия локального экстремума по знаку второй производной и по знаку n-ой производной.

19. Правило Лопиталя (доказательство для отношения двух бесконечно малых в точке $a \in \mathbb{R}$), существенность его условий.

20. Первообразная, обобщённая первообразная. Постоянство разности двух обобщённых первообразных на промежутке. Неопределённый интеграл, его линейность. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределённом интеграле.

Математический анализ (2-ой семестр)

для факультета фундаментальной физико-химической инженерии

Программа курса (вопросы к экзамену[1])

2018/19 уч. г.

Часть I.

1. Числовой ряд, его члены, частичные суммы, остатки. Сходимость ряда, его сумма. Необходимое условие сходимости ряда. Линейность суммы ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Примеры сходящихся и расходящихся рядов: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ $(q \in \mathbb{R})$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

2. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Признак Даламбера, *признак Даламбера в предельной форме. Признак Коши в двух формах.* Примеры рядов, сходимость или расходимость которых не может быть установлена с помощью признаков Даламбера и Коши. Пример, показывающий, что признак Коши сильнее признака Даламбера.

3. Признак сравнения в предельной форме (метод выделения главной части). *Критерий сходимости ряда с монотонной последовательностью членов.* Сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при различных $p \in \mathbb{R}$.

4. Абсолютная сходимость ряда и его условная сходимость. Сходимость абсолютно сходящегося ряда. *Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле*; существенность условия монотонности в них. *Перестановки членов абсолютно и условно сходящихся рядов.*

Часть II.

1. Разбиение отрезка, диаметр разбиения, размеченное разбиение, интегральная сумма Римана. Определённый интеграл (интеграл Римана) функции на отрезке: его определение как предела интегральных сумм *и единственность*.

2. Необходимое условие интегрируемости. Верхняя и нижняя суммы Дарбу ограниченной функции. *Критерий Дарбу интегрируемости.* Пример ограниченной неинтегрируемой функции (функция Дирихле).

3. Простейшие свойства определённого интеграла: *линейность*, *неотрицательность* (*интегрирование неравенств*), независимость от изменения значений функции в конечном числе точек.

---

[1] Помимо знания материала, подробно описанного в пунктах программы, предполагается знание примеров к нему. *Курсив означает необязательность знания соответствующих доказательств.*
В билет входят: вопрос из части I, вопрос из части II, вопрос из части III, задачи.

4. Интегрируемость на подотрезках, *аддитивность интеграла по отрезкам*, монотонность по отрезкам.

5. *Интегрируемость модуля и произведения.* Интегральная теорема о среднем.

6. Интегрируемость непрерывных, кусочно-непрерывных *и монотонных функций.*

7. Формула Ньютона – Лейбница. Интеграл с переменным верхним пределом как первообразная, его непрерывность. Существование первообразной у непрерывной функции.

8. Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле.

9. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме и с остатком в форме Лагранжа. Представление функции своим рядом Тейлора.

10. Несобственный интеграл (с особенностями в верхнем, нижнем или обоих пределах интегрирования). Примеры сходящихся и расходящихся интегралов. Равенство несобственного и собственного интегралов, если последний существует.

11. Свойства несобственного интеграла: *линейность, интегрирование неравенств, формула Ньютона – Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.*

12. *Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Признак сравнения; признак сравнения в предельной форме* (*метод выделения главной части*). Пример: сходимость интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x \, dx$. Интегральный признак сходимости ряда.

13. Абсолютная и условная сходимость-I: определение, *сходимость абсолютно сходящегося интеграла, признаки сходимости Абеля и Дирихле.* Интеграл Дирихле (сходимость и *значение*).

14. Абсолютная и условная сходимость-II: определение, *признаки сходимости Абеля и Дирихле.* Примеры: сходимость интегралов $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^s}$ и $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos kx}{x^s}$ $(s > 0,\, k \neq 0)$ при $a > 0$ и при $a = 0$. Интегралы Френеля (сходимость и *значение*).

15. Г-функция Эйлера: определение и его корректность (сходимость интеграла), формулы понижения *и дополнения*, другое интегральное представление. Интеграл Эйлера – Пуассона. *Формула Стирлинга для* Г*-функции и для факториала.*

16. B-функция Эйлера: определение и его корректность (сходимость интеграла), симметричность, другое интегральное представление. *Связь* B- *и* Г*-функций.* Пример: вычисление интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x \, dx$.

17. Аддитивные функции промежутка: свойства, достаточное условие порождаемости интегралом.

18. Вычисление площади плоской фигуры при явном, *полярном и параметрическом* задании ограничивающих её кривых. Вычисление длины кривой, заданной параметрически, явно и в полярных координатах.

19. *Вычисление объёма и площади поверхности тела вращения, объёма тела с известными поперечными сечениями. Нахождение массы, моментов и центра масс кривой. Теоремы Гульдина – Паппа.*

Часть III.

1. Линейное пространство $\mathbb{R}^n$, скалярное произведение в нём. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Норма (длина) и метрика (расстояние) в $\mathbb{R}^n$, неравенство треугольника. *Неравенства Гёльдера и Минковского.*

2. Непрерывность и предел функции нескольких переменных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Предел по направлению и связанные с ним особенности случая $n \geqslant 2$.

3. Частные производные (f'_{x_k}) и производные по направлениям $(f'_{\vec{e}})$, связь между ними; недостаточность существования частных производных для непрерывности.

4. Дифференцируемость-I: определение дифференцируемой функции, дифференциал, его связь с производными по направлениям, недостаточность существования производных по всем направлениям для дифференцируемости.

5. Дифференцируемость-II: определение дифференцируемой функции, дифференциал, его связь с частными производными и другое обозначение частных производных $(\frac{\partial f}{\partial x_k})$, *достаточное условие дифференцируемости.*

6. Линия (поверхность) уровня. Градиент, его связь с производными по направлениям и геометрический смысл.

7. Касательная плоскость к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, и геометрический смысл дифференциала.

8. *Дифференцирование сложной функции.* Инвариантность формы первого дифференциала. *Критерий полного дифференциала.*

9. Частные производные высших порядков. *Теоремы Шварца и Янга (Юнга) о равенстве смешанных производных.* Дважды и k раз дифференцируемые и непрерывно дифференцируемые функции. Второй *и последующие* дифференциалы.

10. Функции, заданные неявно. *Теорема о неявной функции.* Нахождение частных производных и дифференциалов неявной функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$.

11. *Формула Тейлора для функции нескольких переменных.* Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. *Достаточное условие экстремума.*

12. Условный экстремум — экстремум на кривой (поверхности). Функция Лагранжа. *Метод множителей Лагранжа: общий случай и случай двух переменных.* Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в области, ограниченной данными кривыми (поверхностями).

13. Метрическое пространство. Предел последовательности. Фундаментальная последовательность, фундаментальность сходящейся последовательности. Полное метрическое пространство. Полнота пространства $\mathbb{R}^n$.

14. Шары в метрическом пространстве. Внутренние, внешние, граничные, изолированные и предельные точки множества. *Характеризация предельных точек как пределов последовательностей.*

15. Открытые и замкнутые множества-I: определения, открытость внутренности и внешности множества, замкнутость его границы, *открытость шара и замкнутость замкнутого шара.*

16. Открытые и замкнутые множества-II: определения, объединение и пересечение открытых и замкнутых множеств, *эквивалентные условия замкнутости множества*, замыкание множества.

17. Компактные множества (компакты). *Ограниченность и замкнутость компакта, компактность его замкнутого подмножества. Существование предельной точки у бесконечного подмножества компакта.* Свойство секвенциальной компактности. *Компактность бруса в* $\mathbb{R}^n$. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.

18. Непрерывные отображения метрических пространств. *Непрерывность композиции. Свойства функций, непрерывных на компакте.* Линейно связное множество. *Свойства функций, непрерывных на линейно связном множестве и на линейно связном компакте.*

19. Дифференцируемые отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Матрица Якоби, якобиан. *Дифференцируемость обратного отображения. Теорема о неявном отображении.* Нахождение дифференциалов функций, заданных неявно системой уравнений.