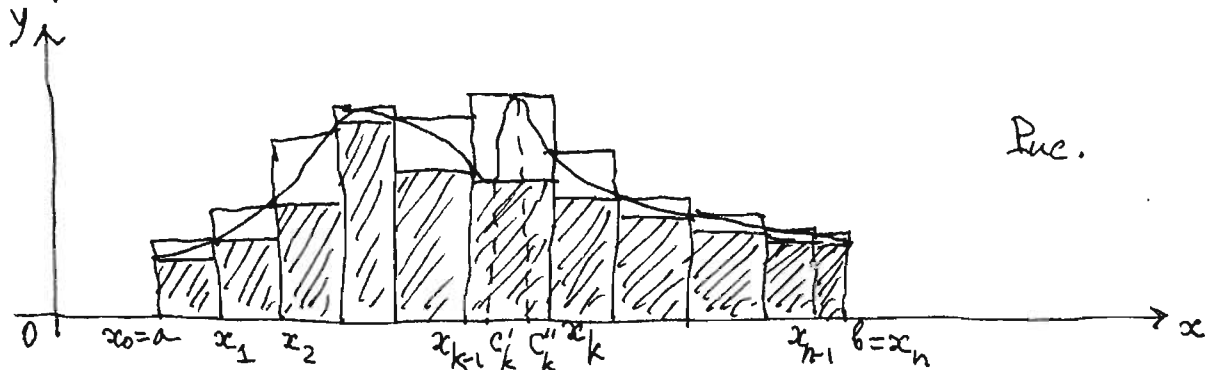


## Глава 2. Определённый интеграл Римана.

### §1. Площадь криволинейной трапеции.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на отрезке  $[a, b]$ . Вычислим площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  и кривой  $y=f(x)$  — графиком функции  $f$  над отрезком  $[a, b]$  (см. рис.); наряду с термином криволинейная трапеция будем использовать также термин — подграфик функции  $f$  над отрезком  $[a, b]$ .



Прежде, чем приступить к решению поставленной задачи, нужно предварительно дать определение площади криволинейной трапеции (подграфика), убедиться в том, что её площадь существует, и затем уже искать способ точного или приближённого её вычисления.

В курсе элементарной математики площадь круга определяется как общий предел площадей вписанных и описанных многоугольников. Подробный приём мы упомянем для определения площади криволинейной трапеции.

С этой целью разобьём отрезок  $[a, b]$  — основание трапеции точками  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n=b$  на частичные отрезки  $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Согласно теореме Вейерштрасса, на каждом из этих отрезков непрерывная функция  $f$  принимает самые большие и самые маленькие значения. Пусть  $f(c'_k)$  — наименьшее, а  $f(c''_k)$  — наибольшее значение функции на  $[x_{k-1}, x_k] = \Delta_k$  так что  $c'_k, c''_k \in \Delta_k$  и  $f(c'_k) = \min_{x \in \Delta_k} f(x) = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$  и  $f(c''_k) = \max_{x \in \Delta_k} f(x) = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$ . Площадь прямоугольника, основанием которого служит отрезок  $\Delta_k$ , а высотой — ордината кривой  $y=f(x)$  в точке  $c'_k$ ,  $x_{k-1} \leq c'_k \leq x_k$ , равна  $f(c'_k)(x_k - x_{k-1}) = f(c'_k)\Delta x_k$ , где  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$  — длина отрезка  $\Delta_k$ . Площадь заштрихованной многоугольной фигуры на рис. равна сумме всех таких площадей:

$$S = f(c'_1)\Delta x_1 + f(c'_2)\Delta x_2 + \dots + f(c'_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(c'_k)\Delta x_k$$

Совокупность чисел  $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=b$ , разбивающих отрезок  $[a, b]$  обозначим символом  $T$  и назовём  $T$  разбиением отрезка  $[a, b]$ . Величина  $S$  зависит от разбиения  $T$  (и функции  $f$ ):

$$S = S(f; T) = \sum_{k=1}^n f(c'_k)\Delta x_k. \quad (1)$$

Подобным же образом, взяв за высоты прямоугольников ординаты кривой  $y=f(x)$  в точках  $c_k''$ , получим сумму

$$S(f; T) = \sum_{k=1}^n f(c_k'') \Delta x_k. \quad (2)$$

Многоугольная фигура, площадь которой равна  $s(f; T)$  содержится в криволинейной трапеции, а многоугольная фигура, площадь которой равна  $S(f; T)$ , содержит эту трапецию (см. рис.).

Отправившись от величин  $s(f; T)$  и  $S(f; T)$ , мы подробно толку, как это делалось в случае площади круга, определим площадь криволинейной трапеции. С этой целью обозначим через  $\lambda$  наибольшее из чисел  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Ясно, что  $\lambda$  зависит от  $T$ ,  $\lambda = \lambda(T)$ ; число  $\lambda = \lambda(T)$  называют диаметром разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$ .

Если мы теперь будем брать разбиения  $T$  так, чтобы длины всех частичных отрезков неограниченно убывали; т.е., чтобы  $\lambda(T) \rightarrow 0$  (коро-не,  $\lambda \rightarrow 0$ ), то величины  $s(f; T)$  и  $S(f; T)$  будут изменяться. Если в процессе изменения они стремятся к одному пределу, то мы скажем, что криволинейная трапеция — квадратуемая фигура, а общий предел мы назовём площадью этой фигуры. Если же пределы этих величин будут разные, то мы скажем, что криволинейная трапеция не имеет площади; т.е., — некватуемая фигура. Таким обра-зом, мы пришли к следующему важному определению.

Определение 1. Площадью  $S$  криволинейной трапеции мы называем общий предел величин  $s(f; T)$  и  $S(f; T)$ , когда  $\lambda(T) \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ).

$$S = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} s(f; T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(f; T). \quad (3)$$

Мы не будем в этом параграфе заниматься другими зада-чами, решение которых сводится к отысканию пределов подобных же сумм. Заметим только, что в некоторых из них будет браться не наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$ , а одно из значений функции на этом отрезке, причём не всегда нам известное. Имей в виду этот общий метод решения всех таких задач, мы будем изучать пределы сумм вида

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

где  $\xi_k$  — произвольная точка отрезка  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Такое изучение приводит нас к понятию определённого интег-рала посредством которого, в частности, будет вычислена площадь криволинейной трапеции.

§ 2. Определение интеграла Римана. Условия его существования.

2.1. Основные определения и обозначения.

Пусть  $f(x)$  — произвольная функция, заданная на отрезке  $[a, b]$ ,  $T$  — произвольное разбиение отрезка точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , с диаметром  $\lambda(T) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , и  $\xi_k$  — произволь-ная точка частичного отрезка  $[x_{k-1}, x_k] = \Delta_k$  разбиения  $T$ ; совокупность точек  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  обозначим одним символом  $\bar{\xi}$ .

Определение 1. Сумма вида

$$\sigma = \sigma(f; T; \bar{\xi}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (2.1)$$

называется интегральной суммой функции  $f$ , удовлетворяющей разбиению  $T$  отрезка  $[a, b]$  и набору  $\bar{\xi}$  точек  $\xi_k \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Следующее определение ещё более важно и является основным в этой главе.

Определение 2. Если существует конечный предел интегральных сумм при  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , то его называют определённым интегралом (или интегралом Римана) функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначают так:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T; \bar{\xi}), \quad (2.2)$$

а функцию  $f$  называют интегрируемой (по Риману) на этом отрезке.

Равенство (2.2) означает, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta > 0$ , что неравенство

$$|\sigma(f; T; \bar{\xi}) - I| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

будет иметь место для любого разбиения  $T$  отрезка, удовлетворяющего условию  $\lambda(T) < \delta$ , и для любого к нему набора точек  $\bar{\xi}$ .

Замечание 1. Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то суммы (1.1) и (1.2) из предыдущего § 1 также являются для  $f$  интегральными суммами. Поэтому, если континуальная функция, порождённая положительно непрерывной функцией  $f$  на отрезке  $[a, b]$ , имеет площадь  $S$ , то, на основании определений 1, § 1 и 2,

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.3)$$

Формулой (2.3) определяется геометрический смысл определённого интеграла.

2.2. Необходимое условие интегрируемости функции.

Теорема 1. Ограниченность функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  есть необходимое условие её интегрируемости на  $[a, b]$ .

Если функция  $f(x)$  не ограничена на отрезке  $[a, b]$ , то она будет неограниченной хотя бы на одном частичном отрезке каждого разбиения  $T$ . Пусть это будет отрезок  $[x_{i-1}, x_i]$ . Выберем на остальных отрезках  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k \neq i$ , какие-то числа  $\xi_k$  и положим

$$A = \sum_{k=1}^{i-1} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=i+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Число  $A$  отличается от интегральной суммы на одно слагаемое, соответствующее номеру  $k=i$ .

Далее, так как функция  $f(x)$  не ограничена на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ , то и функции  $f(x) \Delta x_i$ ,  $\Delta x_i > 0$ , неограничена на этом отрезке. В силу этого

найдётся такая точка  $\xi_i$ ,  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ , что будет верно неравенство (4)  
 $|f(\xi_i) \Delta x_i| > |A| + \frac{1}{\lambda(T)}$ .

Положив теперь

$$\sigma = \sigma(f; T; \bar{\xi}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = A + f(\xi_i) \Delta x_i,$$

получим

$$|\sigma| = |A + f(\xi_i) \Delta x_i| \geq |f(\xi_i) \Delta x_i| - |A| > |A| + \frac{1}{\lambda(T)} - |A| = \frac{1}{\lambda(T)}.$$

Из последнего неравенства следует, что  $\sigma$  становится неограниченной величиной, если  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . В силу этого не может существовать конечного предела этой величины; и.е., функция  $f$  не интегрируема.  $\Delta$

Пример ограниченной функции Дирихле  $D(x)$  ( $D(x) = 0$ , если  $x \in \mathbb{Q}$ , и  $D(x) = 1$ , если  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) показывает, что теорема 1 не может служить достаточным условием интегрируемости функции на отрезке.

1 Действительно, функция  $D(x)$  определена и ограничена на любом отрезке  $[a, b]$  и для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  каждый его частичный отрезок  $[x_{k-1}, x_k]$  содержит как точки  $\xi'_k \in \mathbb{Q}$ , так и точки  $\xi''_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Поэтому, интегральные суммы  $\sigma(D; T; \bar{\xi}') = \sum_{k=1}^n D(\xi'_k) \Delta x_k = 0$ , а  $\sigma(D; T; \bar{\xi}'') = \sum_{k=1}^n D(\xi''_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a \neq 0$ . Таким образом, не может существовать предела при  $\lambda(T) \rightarrow 0$  интегральных сумм функции  $D(x)$  и она не интегрируема на  $[a, b]$ .  $\Delta$

## 2.4. Некоторые классы интегрируемых функций.

Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции (и существования определённого интеграла) получены в конце XIX века французским математиком Дарбу. С их помощью доказывалось, что на каждом отрезке  $[a, b]$  интегрируемы любая непрерывная функция, любая ограниченная функция, имеющая конечное множество точек разрыва, и любая монотонная функция (которая может иметь бесконечное множество точек разрыва). Доказательства этих результатов, представляющие несомненный теоретический интерес, не оказывают существенного влияния на практические приложения определённого интеграла, и по этой причине они здесь не приводятся. Однако, сами эти результаты в дальнейшем широко используются.

## 2.5. Достаточное условие вычисления определённого интеграла от интегрируемой функции.

Теорема 2. Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и обладает на  $[a, b]$  первообразной функцией  $F(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.4)$$

$\Delta$  Рассмотрим произвольное разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  и образуем по теореме

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_k) - F(x_{k-1}) + \dots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})].$$

По условию теоремы, на каждом частичном отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$  (5) разбиения  $T$  выполнены все условия теоремы Лагранжа о конечных приращении, согласно которой  $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k) \Delta x_k$  с некоторой  $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ . Поэтому,

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (2.5)$$

Так как левая часть в формуле (2.5) — постоянная число, то существует  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$ . Следовательно, существует равенство

предел правой части в (2.5) при  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , который по определению 2 есть определённый интеграл функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$ , и справедливо равенство (2.4).  $\Delta$

Замечание 2. Ниже, в параграфе 4, будет доказано, что любая непрерывная на отрезке функция обладает на нём первообразной функцией. Поэтому, формула (2.4) справедлива, в частности, для любой функции  $f$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ .

Замечание 3. На основании замечаний 1 и 2 (а также формулы (2.3) и (2.4)) заключаем, что площадь  $S$  криволинейной трапеции, порождённой положительной непрерывной функцией  $f$  на отрезке  $[a, b]$ , вычисляется по формуле

$$S = F(b) - F(a), \quad (2.6)$$

в которой  $F(x)$  — какая-либо первообразная функция для  $f$  на  $[a, b]$ .

Проиллюстрируем формулу (2.6) двумя примерами.

Постоянная функция  $f(x) = c$  имеет первообразную  $F(x) = cx$ , и поэтому

$$\int_a^b c dx = cb - ca = c(b-a); \quad \int_a^b dx = b-a. \quad (2.7)$$

Если  $c \geq 0$ , то число  $c(b-a)$  равно площади прямоугольника, ограниченного прямыми  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  и  $y=c$  (частный случай криволинейной трапеции).

Аналогично, функция  $f(x) = x$  имеет первообразную  $F(x) = \frac{x^2}{2}$ , и поэтому

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a+b}{2} (b-a). \quad (2.8)$$

Число  $\frac{a+b}{2} (b-a)$ , когда  $0 < a < b$ , равно площади трапеции, образованной прямыми  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  и  $y=x$ , так как  $\frac{a+b}{2}$  — длина ~~ее~~ средней линии, а  $(b-a)$  — высота трапеции.

Формулы (2.7) и (2.8) показывают, что понятие площади (2.3) криволинейной трапеции есть прямое обобщение известных из школы понятий площади прямоугольника и трапеции.

## 2.6. Заключительные замечания.

Согласно одному из основных результатов Дарбу, монотонная на отрезке функция, имеющая внутри него точки разрыва, не может обладать на отрезке первообразными функциями; и.е., она не может быть производной функции в интервале ни для одной числовой функции. Дело в том, что, как мы это знаем, монотонная функция имеет точки разрыва только первого рода, а по теореме Дарбу, всякая производная функция может иметь разрывы только второго рода.

Таким образом, для монотонной функции на отрезке, имеющей внутри него разрывы, формула (2.4) не возможна.

§3. Простейшие свойства определённых интегралов.

Предельный переход  $\lambda(T) \rightarrow 0$  следует рассматривать (и это соответствует действительности) как такое обобщение предельного перехода  $x \rightarrow a$ , при котором сохраняются все свойства предела, имеющие место в случае  $x \rightarrow a$ . Это наблюдение (утверждение) позволяет установить многие свойства определённых интегралов.

3.1. Линейные свойства определённого интеграла.

Теорема. Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$ , то для любых чисел  $k_1, k_2$  справедлива формула

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx. \quad (3.1)$$

Для произвольного разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  и произвольного набора  $\bar{\xi}$  точек  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], 1 \leq k \leq n$ , согласно формуле (2.1), §2,

$$\begin{aligned} \sigma(k_1 f + k_2 g; T; \bar{\xi}) &= \sum_{k=1}^n [k_1 f(\xi_k) + k_2 g(\xi_k)] \Delta x_k = k_1 \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + k_2 \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= k_1 \sigma(f; T; \bar{\xi}) + k_2 \sigma(g; T; \bar{\xi}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как по условию существуют

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T; \bar{\xi}) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(g; T; \bar{\xi}) = \int_a^b g(x) dx, \quad (3.3)$$

то, на основании (3.2), существуют

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(k_1 f + k_2 g; T; \bar{\xi}) = k_1 \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T; \bar{\xi}) + k_2 \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(g; T; \bar{\xi}),$$

и, с учётом формул (3.3) и (2.2), §2, справедлива формула (3.1).  $\Delta$

Следствие 1. Если функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то для любого числа  $k$  справедливо  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .

В формуле (3.1) полагаем  $k_1 = k$  и  $k_2 = 0$ .  $\Delta$

Следствие 2. Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$ , то  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ .

В формуле (3.1) полагаем  $k_1 = 1$  и  $k_2 = \pm 1$ .  $\Delta$

3.2. Свойство монотонности определённого интеграла.

Теорема. Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq g(x)$  для всех  $x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx. \quad (3.4)$$

Рассмотрим произвольное разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  и произвольный набор  $\bar{\xi}$  точек  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], 1 \leq k \leq n$ . Так как все  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ , то на основании формулы (2.1), §2, и условия теоремы,

$$\sigma(f; T; \bar{\xi}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k = \sigma(g; T; \bar{\xi}),$$

и следовательно, с учётом (3.3),

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T; \bar{\xi}) \geq \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(g; T; \bar{\xi}) = \int_a^b g(x) dx. \quad \Delta$$

Следствие. Если функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

◁ Уменьшим (3.4), в которой  $g(x) = 0$  на  $[a, b]$  и  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , ▷

### 3.3. Оценка модуля определённого интеграла.

Теорема. Если функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (3.5)$$

◁ Интегрируемость модуля интегрируемой функции доказывается с помощью критерия интегрируемости Дарбу. Для непрерывной функции это свойство не требует ~~отдельного~~ доказательства, так как её модуль — тоже непрерывная функция.

Поскольку  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  для всех  $x \in [a, b]$ , то по свойствам монотонности и линейности определённого интеграла (пункт 3.2 и следствие 1 из пункта 3.1),

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

что равносильно (3.5). ▷

### 3.4. Теорема о среднем значении для определённого интеграла.

Теорема. Если функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то между  $a$  и  $b$  существует такая точка  $c$ , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a). \quad (3.6)$$

◁ По второй теореме Вейерштрасса, непрерывная <sup>на отрезке</sup> на  $[a, b]$  функция  $f$  достигает на нём своих наименьшего значения  $m$  и наибольшего значения  $M$ ,  $m \leq f(x) \leq M$  для всех  $x \in [a, b]$ . Поэтому по свойству монотонности

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

и среднее интегральное  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  лежит на  $[m, M]$ ,  $m \leq \mu \leq M$ .

По теореме Дарбу о непрерывном образе отрезка, число  $\mu$  одето было значением функции  $f$  в некоторой точке  $c \in [a, b]$ ,  $\mu = f(c)$ , что равносильно (3.6). ▷

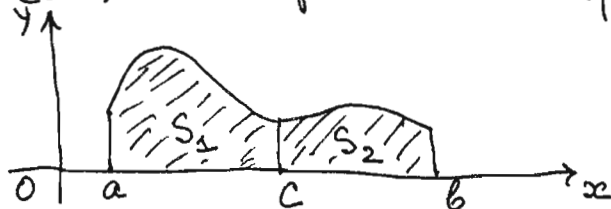
Замечание. Если в теореме  $f \geq 0$  на  $[a, b]$ , то левая часть в формуле (3.6) выражает площадь криволинейной трапеции (подграфика функции  $f$  над  $[a, b]$ ) (см. формулу (2.3), § 2), а число в правой части (3.6) равно площади прямоугольника, ограниченного кривыми  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  и  $y=f(c)$ .

### 3.5. Аддитивность определенного интеграла.

Теорема. Если функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то для любого  $a, a < c < b$ , она интегрируема на  $[a, c]$  и  $[c, b]$  и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (3.7)$$

Существование интегралов в правой части формулы (3.7) доказывается с помощью критерия интегрируемости Дарбу. Для непрерывной функции  $f$  доказательство упрощается, поскольку из непрерывности  $f$  на  $[a, b]$  следует её непрерывность на  $[a, c]$  и  $[c, b]$ .  
 Если, следовательно, непрерывная функция  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$  и  $a < c < b$ , то равенство (3.7) имеет простой геометрический смысл (см. рис.):



площадь  $S$  под графиком функции  $f$  на  $[a, b]$  равна сумме  $S_1 + S_2$  площадей под графиками функции  $f$  на  $[a, c]$  и  $[c, b]$ . Действительно,

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad S_1 = \int_a^c f(x) dx, \quad S_2 = \int_c^b f(x) dx$$

и

$$\int_a^b f(x) dx = S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

В общем случае произвольной непрерывной функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  напомним её мин  $f(x) = m$  и образуем непрерывную на  $[a, b]$  функцию  $g(x) = f(x) + k$ , где  $k = |m| + 1$ . Тогда  $g(x) > 0$  на  $[a, b]$  и по доказанному

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^c g(x) dx + \int_c^b g(x) dx. \quad (3.8)$$

Но

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b k dx = \int_a^b f(x) dx + k(b-a),$$

$$\int_a^c g(x) dx = \int_a^c f(x) dx + k(c-a), \quad \int_c^b g(x) dx = \int_c^b f(x) dx + k(b-c).$$

Подставим эти формулы в формулу (3.8), получим

$$\int_a^b f(x) dx + k(b-a) = \int_a^c f(x) dx + k(c-a) + \int_c^b f(x) dx + k(b-c),$$

откуда и следует (3.7).  $\triangleright$

Важное замечание. Во всех пар определенных интеграл рассматривалась только при  $a < b$  ( $a$  - нижний предел интегрирования,  $b$  - верхний).

Определение 1. Если  $a \geq b$ , то положим

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Эти определения удобны по многим причинам, прежде всего,

сохраняется формула (2.4), § 2:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = - (F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$$

и

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Затем, формулу (3.7) можно уточнить в таком виде:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0$$

при любом взаимном расположении чисел  $a, b, c$ .

#### § 4. Интеграл с переменным верхним пределом.

##### 4.1. Интеграл с переменным верхним пределом как первообразная функция.

Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда, согласно свойству аддитивности определённого интеграла, для любого  $x \in [a, b]$  существует функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad F(a) = 0, \quad (4.1)$$

которую называют интегралом от функции  $f$  с переменным верхним пределом.

Теорема. Если функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то функция  $F(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , определённая интегралом (4.1), является первообразной функцией для  $f$  на  $[a, b]$ .

Проверим сначала, что функция  $F(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ . Рассмотрим произвольную точку  $x_0 \in [a, b]$  и произвольное приращение  $\Delta x$ , такое что  $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) &= \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \\ &= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

По теореме о среднем значении для интеграла,

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = f(x_0 + \theta \Delta x) (x_0 + \Delta x - x_0) = f(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

так что

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = f(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \quad (4.2)$$

Поскольку  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \theta \Delta x) = f(x_0)$  (функция  $f$  непрерывна в  $x_0 \in [a, b]$ ), то

из (4.2) следует, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x = f(x_0) \cdot 0 = 0$ , то из (4.2) следует,

что  $F(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x_0 + \Delta x)$  и функция  $F(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ .

Пусть теперь  $x_0 \in (a, b)$ . Тогда из (4.2) следует

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0 + \theta \Delta x), \quad \Delta x \neq 0,$$

и  $f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = F'(x_0).$   $\triangleright$

#### 4.2. Основная формула интегрального исчисления.

Теорема. Если функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то для любой её первообразной функции  $F(x)$  справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (4.3)$$

Из предыдущей теоремы, функции  $\Phi(x)$ , определяемая формулой (4.1) служит первообразной функцией для  $f$  на  $[a, b]$ . Если  $F(x)$  — любая другая первообразная для  $f$  на  $[a, b]$ , то существует некоторая постоянная  $c$ , что  $\Phi(x) = F(x) + c$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a). \quad \triangleright$$

Формулу (4.3) называют основной формулой интегрального исчисления, её называют также формулой Ньютона-Лейбница (хотя ни одному из них она не принадлежит, а доказана английским математиком Барроу, учеником которого был Ньютон; Лейбницу присутствии к изучению математического анализа позже Ньютона).

Следствие. Приведенная в §2 формула (2.6) для вычисления площади криволинейной трапеции, действительно имеет место.

#### 4.3. Замена переменной интегрирования в определённом интеграле.

Пусть функция  $\varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[\alpha, \beta]$ ; т.е.,  $\varphi$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$  вместе со своей производной  $\varphi'$ , и  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ,  $a < b$ . Тогда, как известно из материала первого семестра, множество  $R_\varphi$  её значений на  $[\alpha, \beta]$  есть некоторый отрезок, либо совпадающий с отрезком  $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] = [a, b]$ , либо его содержащий (теорема Барроу). Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $R_\varphi$  и  $F(x)$  — её первообразная на отрезке  $[a, b]$ ; так что,  $F(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $F'(x) = f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ . Тогда функция  $F(\varphi(t))$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ , дифференцируема в  $(\alpha, \beta)$  (как композиция непрерывных и дифференцируемых функций) и  $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$ .

Таким образом, функция  $F(\varphi(t))$  служит первообразной для функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на  $[\alpha, \beta]$  и  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$  как произведение непрерывных функций (сложная функция  $f(\varphi(t))$  непрерывна как композиция непрерывных функций).

По формуле (4.3),

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Следовательно, 
$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Это и есть формула замены переменной интегрирования в определённом интеграле.

#### 4.4. Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Пусть функции  $u$  и  $v$  имеют непрерывные производные на отрезке  $[a, b]$  (тогда и сами  $u$  и  $v$  непрерывны на  $[a, b]$ ). Тогда из равенства

$$(uv)' = u'v + v'u$$

следует, что функция  $uv$  есть первообразная для функции  $u'v + v'u$  на  $[a, b]$  и по формуле (4.3)

$$\int_a^b (u'v + v'u) dx = uv \Big|_a^b.$$

Отсюда

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v u' dx.$$

Это и есть формула интегрирования по частям, в которой

$$uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

#### 4.5. Общая теорема о среднем значении для интегралов.

Теорема. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и  $g(x)$  не имеет нулей внутри отрезка, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx, \quad a < c < b.$$

Пусть  $F(x)$  - первообразная для функции  $f(x)g(x)$  на  $[a, b]$ , а  $G(x)$  - первообразная для  $g(x)$  на  $[a, b]$ . Пользуясь формулой (4.3) и теоремой Коши о среднем значении, получим

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f(c)g(c)}{g(c)} = f(c), \quad a < c < b.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.  $\triangleright$

Теорема о среднем значении из пункта 3.4, § 3, есть частный случай доказанной теоремы, когда  $g(x) = 1, x \in [a, b]$ .

## §5. Применение определенного интеграла.

### 5.1. Задача о пройденном пути.

Требуется найти путь  $s$ , пройденный движущейся по прямой точкой за отрезок времени  $[t_0, T]$ , если известен закон изменения мгновенной скорости  $v=v(t)$  и функция  $v(t)$  положительна и непрерывна.

Прежде всего заметим, что между моментами времени  $t_0$  и  $T$  можно указать такой момент времени  $\tau$ , что  $s = v(\tau)(T - t_0)$ ;  $v(\tau)$  — средняя скорость движения. Действительно, пусть  $\bar{v}$  — наибольшая скорость точки на промежутке от  $t_0$  до  $T$ , а  $\underline{v}$  — наименьшая. Тогда  $\underline{v}(T - t_0) \leq s \leq \bar{v}(T - t_0)$  и  $\underline{v} \leq \frac{s}{T - t_0} \leq \bar{v}$ . Поскольку функция  $v(t) > 0$  и непрерывна на  $[t_0, T]$ , по теореме Дарбу о непрерывном образе отрезка, между  $t_0$  и  $T$  найдется такой момент времени  $\tau$ , что  $v(\tau) = \frac{s}{T - t_0}$ , откуда  $s = v(\tau)(T - t_0)$ .

Разобьем промежуток времени от  $t_0$  до  $T$  на  $n$  более коротких промежутков: от  $t_0$  до  $t_1$ , от  $t_1$  до  $t_2, \dots$ , от  $t_{n-1}$  до  $t_n = T$ . К каждому из этих рассуждений в каждом промежутке времени от  $t_{k-1}$  до  $t_k, 1 \leq k \leq n$ , можно указать такой момент времени  $\tau_k$ , что путь, пройденный точкой за промежуток времени от  $t_{k-1}$  до  $t_k$ , равен  $v(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) = v(\tau_k) \Delta t_k$ . Тогда

$$s = \sum_{k=1}^n v(\tau_k) \Delta t_k.$$

Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0, \lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k$ , получим

$$s = \int_{t_0}^T v(t) dt.$$

### 5.2. Работа переменной силы.

Если материальная точка перемещается под действием постоянной силы  $F$  по направлению этой силы и прошла путь длины  $s$ , то как известно из элементарной физики, работа  $A$  этой силы  $F$  вычисляется по формуле  $A = F \cdot s$ .

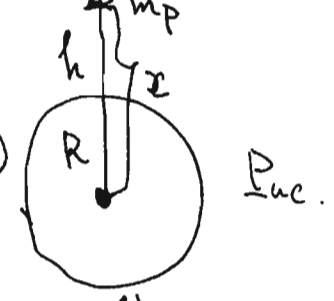
Пусть теперь материальная точка движется по оси  $Ox$  от точки  $A(a)$  до точки  $B(b)$  ( $b > a$ ) под действием переменной силы, направленной по оси  $Ox$  и являющейся непрерывной функцией  $F = F(x)$  от  $x \in [a, b]$ . Для нахождения работы  $A$ , как и в пункте 5.1, заметим, что найдется такое значение  $\xi \in [a, b]$ , что  $A = F(\xi)(b - a)$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  и на каждом  $[x_{k-1}, x_k], 1 \leq k \leq n$ , найдем точку  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , что работа  $A_k$  силы  $F$  на отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$  равна  $A_k = F(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = F(\xi_k) \Delta x_k$ . Тогда

$$A = \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta x_k$$

и после перехода к пределу при  $\lambda \rightarrow 0, \lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ , получим

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Пример. Определить работу  $A$ , необходи-  
мую для запуска ракеты массой  $m_p$  с поверх-  
ности Земли вертикально вверх на высоту  $h$  (рис)



Решение. Обозначим через  $F$  величину силы  
притяжения ракеты Землей. Пусть  $m_z$  - масса  
Земли. Согласно закону тяготения (обратных квадратов)

$$F = k \frac{m_p m_z}{x^2}$$

где  $x$  - расстояние от ракеты до центра Земли. Ставим  $k m_z m_p = \delta$ , по-  
лучим  $F(x) = \frac{\delta}{x^2}$ ,  $R \leq x \leq h+R$ ,  $R$  - радиус Земли. При  $x=R$  сила  $F(R) = \frac{\delta}{R^2}$   
равна весу  $P$  ракеты поэтому  $\delta = PR^2$  и  $F(x) = \frac{PR^2}{x^2}$ . Следовательно,

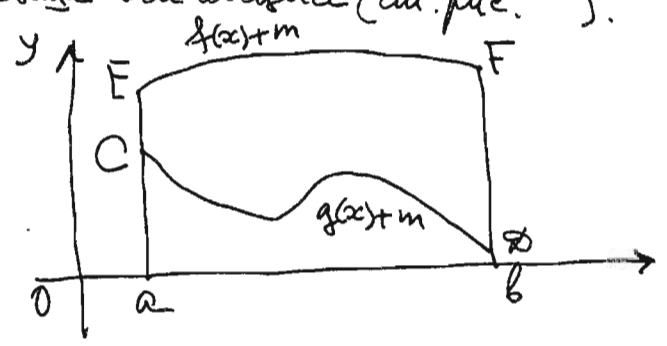
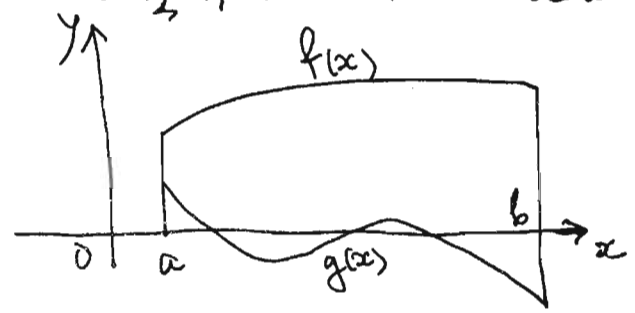
$$A = \int_R^{R+h} F(x) dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \frac{1}{x} \Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}$$

### 5.3. Площадь фигур, заключенной между двумя графиками.

Теорема. Если фигура ограничена графиками функций  $f$  (сверху)  
и  $g$  (снизу), при этом  $x=a$ ,  $x=b$  ( $a < b$ ) и  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$ , то  
ее площадь

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Перенесем фигуру параллельно оси ординат вверх на такое  
расстояние  $m$ , чтобы она оказалась выше оси абсцисс (см. рис.).

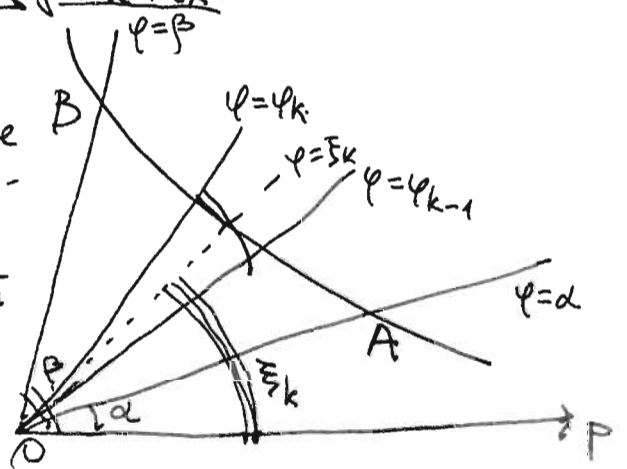


При переносе площадь не меняется, и поэтому

$$\begin{aligned} S &= S_{aEFb} - S_{aCDB} = \int_a^b [f(x)+m] dx - \int_a^b [g(x)+m] dx = \\ &= \int_a^b [f(x)+m - g(x)-m] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad \Delta \end{aligned}$$

### 5.4. Вычисление площади в полярных координатах.

Требуется определить площадь сектора  
 $OAB$  (рис.), ограниченного лучами  $\varphi=\alpha$ ,  $\varphi=\beta$   
и кривой  $AB$ , заданной в полярной системе  
координат уравнением  $r=r(\varphi)$ , где  $r(\varphi)$  непре-  
рывная функция на отрезке  $[\alpha, \beta]$



Разобьем отрезок  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частей  
точками  $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$  и  
положим  $\Delta \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Обозна-  
чим  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta \varphi_k$ . Разобьем данный сектор

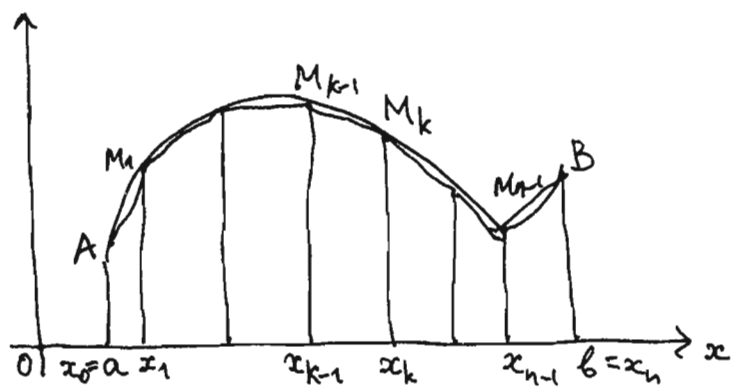
на  $n$  частей дугой  $\varphi = \varphi_k, k=1, 2, \dots, n-1$ . Как и в пункте 5.1 убеждаемся, что площадь  $k$ -го сектора равна площади  $\frac{1}{2} r^2(\xi_k) \Delta\varphi_k$  кругового сектора радиуса  $r(\xi_k)$ , где  $\xi_k$  - некоторая точка отрезка  $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$  и  $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ . Тогда

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} r^2(\xi_k) \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

### 5.5. Вычисление длины дуги.

Дуга дуга  $AB$  (рис.) задана уравнением  $y=f(x), x \in [a, b]$ , где  $f(x)$  - функция, являющаяся на отрезке  $[a, b]$  непрерывно производной.

Длина дуги  $AB$  называется предел, к которому стремится длина ломанной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю.



Вычислим длину  $l$  дуги  $AB$ .

Для этого введем в дугу  $AB$  ломанную линию  $M_0 M_1 \dots M_{k-1} M_k \dots M_{n-1} M_n$ , где  $M_0 = A(a, f(a))$ ,  $M_n = B(b, f(b))$ . Пусть абсциссы точек  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$  обозначены  $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ , ординаты обозначены  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ ,  $y_0 = f(a)$ ,  $y_n = f(b)$ . Имеем разбиение отрезка  $[a, b]$  на частичные отрезки  $[x_{k-1}, x_k], 1 \leq k \leq n$ , с длинами  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, 1 \leq k \leq n$ , и диаметром  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ . Обозначим  $\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = y_k - y_{k-1}, 1 \leq k \leq n$ .

По теореме Пифагора длина звена  $M_{k-1} M_k$  равна  $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$ . Но в силу теоремы Лагранжа,  $\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(\xi_k) \Delta x_k$ , где  $\xi_k$  - некоторая промежуточная точка интервала  $(x_{k-1}, x_k)$ . Отсюда  $\Delta y_k = f'(\xi_k) \Delta x_k$ , и следовательно, длина всей ломанной  $M_0 M_1 \dots M_{n-1} M_n$  равна  $\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$  - интегральной сумме для непрерывной функции  $\sqrt{1 + f'^2(x)}$  на отрезке  $[a, b]$ . Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , получим

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad \text{или} \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (5.1)$$

где  $l$  - длина дуги  $AB$  (по определению).

Согласно (5.1), длина  $l(x)$  дуги  $AM$ , где  $M(x, y), y=f(x)$ , - переменная точка графика, равна

$$l = l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dt, \quad y = f(t), \quad t \in [a, x], \quad a < x \leq b.$$

По теореме пункта 4.1, §4, функция  $l = l(x)$  имеет своей производной непрерывную функцию  $\sqrt{1 + y'^2}$ , и следовательно, её дифференциал  $dl = l'(x) dx$  имеет вид

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (5.1')$$

Возведем обе части равенства (5.1') в квадрат, получим

$$dl^2 = (1 + y'^2) dx^2 = dx^2 + (y')^2 dx^2 = dx^2 + dy^2, \quad (5.2)$$

так как  $dy = f'(x) dx = y' dx$ .

Если кривая  $AB$  задана параметрическими уравнениями  $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ , причём функции  $x(t), y(t)$  имеют непрерывные производные  $x'(t), y'(t)$  на  $[\alpha, \beta]$ , то формула (5.2) дифференциала дуги  $dl$  принимает вид

$dl^2 = [x'^2(t) + y'^2(t)] dt^2$ ,  $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ , а формула (5.1) для длины  $l$  дуги  $AB$  - будет

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} dl = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (5.3)$$

Если кривая  $AB$  задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

в котором  $r'(\varphi)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ , то, учитывая связь между полярными и полярными координатами, параметры уравнения этой кривой будут

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Тогда  $x' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi$ ,  $y' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi$ ,

и по формуле (5.3) получим

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (5.4)$$

Формула дифференциала дуги имеет вид:  $dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$ .

Примечание. Если задана пространственная кривая параметрическим уравнением

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции  $x(t), y(t), z(t)$  имеют непрерывные производные, то ее длина (длина дуги для пространственной кривой) определяется так же, как и для плоской кривой, и вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

являющейся обобщением формулы (5.3). При этом длина дуги отвечающая произвольному значению параметра  $t \in [\alpha, \beta]$  выражается формулой

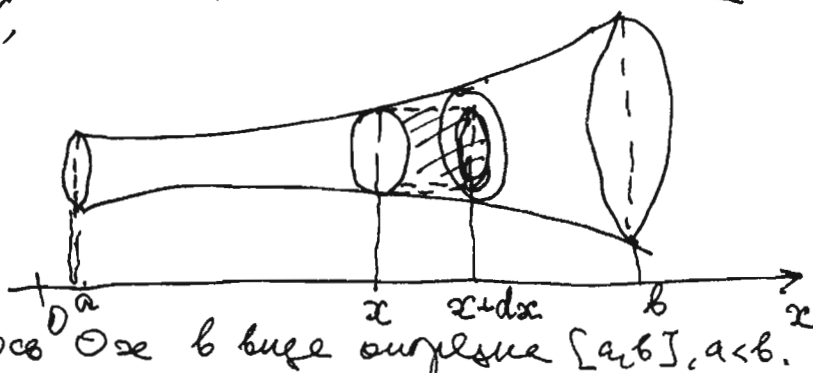
$$l = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt,$$

а потому дифференциал дуги  $dl$  равен  $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$ .

## 5.6. Объем тела с известным поперечным ~~и~~ сечением:

Пусть задано тело с объемом  $V$ , что должно быть известно следующее:

также известна прямая - называем ее осью  $Ox$  (рис.), то какую бы плоскость, перпендикулярную оси  $Ox$ , мы не взяли, нам известна площадь  $S$  сечения тела этой плоскостью, а само тело проектируется на ось  $Ox$  в виде отрезка  $[a, b]$ ,  $a < b$ .



Каждая плоскость пересекать ось  $Ox$  в некоторой точке  $x$ . Каждому числу  $x$  поставлено в соответствие число  $S(x)$  — площадь сечения тела плоскостью (если плоскость не пересекает тело при некотором  $x$ , то  $S(x) = 0$ ). Таким на отрезке  $[a, b]$  определена функция  $S = S(x)$ .

Докажем, что если  $S(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (5.5)$$

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных отрезков — один из них  $[x, x+dx]$  ( $dx = \Delta x$  по определению дифференциала) и пусть  $\lambda$  — диаметр этого разбиения. Через концы отрезка  $[x, x+dx]$  проведем плоскости  $P_1 \perp Ox$  и  $P_2 \perp Ox$ . Между этими плоскостями находится часть тела, объем которой приблизительно равен  $S(x)dx$  и он тем точнее, чем меньше  $\lambda$ . Весь объем

$V \approx \sum S(x)dx$  и это равенство тем точнее, чем меньше  $\lambda$ .

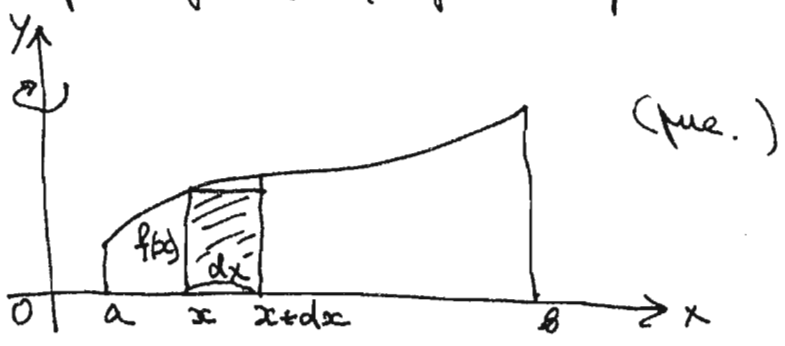
При  $\lambda \rightarrow 0$  получаем формулу (5.5).  $\triangleright$

Если тело образовано вращением линии  $y=f(x)$  вокруг оси  $Ox$  и функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $S(x) = \pi f^2(x)$  и

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (5.5')$$

Рассмотрим теперь криволинейную поверхность, задаваемую координатной и непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функцией  $f$  (см. рис.). Пусть она вращается вокруг оси  $Oy$ . Покажем, что объем  $V$  вращающегося тела равен

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (5.6)$$



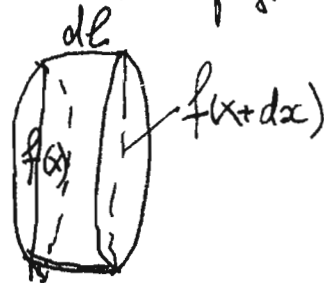
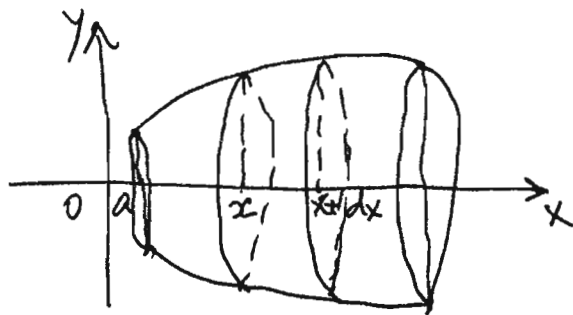
Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных отрезков — один из них  $[x, x+dx]$  (рис.), и пусть  $\lambda$  — диаметр разбиения. При вращении вокруг оси ординат заштрикованный на рис. цилиндр образует тело объема  $2\pi x f(x) dx$ . Весь объем  $V$  приблизительно равен  $\sum 2\pi x f(x) dx \approx V$  и равенство тем точнее, чем меньше  $\lambda$ . Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , получим формулу (5.6), в которой интеграл существует в силу непрерывности на  $[a, b]$  подынтегральной функции.  $\triangleright$

### 5.7. Площадь поверхности вращения.

График функции  $f$ , непрерывной и непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$  (т.е., на  $[a, b]$  непрерывна производная  $f'$ ), вращается вокруг оси абсцисс. Покажем, что площадь получившейся поверхности вращения

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (5.7)$$

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных отрезков — один из них



отрезок  $[x, x+dx]$  и  $\lambda$ -элемент разбиения. Через концы этого отрезка проведем плоскости, перпендикулярные оси абсцисс; они разобьют поверхность на "полосы" (см. рис.), площадь "полосы" приблизительно равна "её длине на ширину"; т.е.,  $2\pi f(x)dx$  (рис.). Площадь всей поверхности (с учётом формулы (5.1'))

$$S \approx \sum 2\pi f(x)dx = \sum 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

и это равенство тем точнее, чем меньше  $\lambda$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  получаем формулу (5.7), в которой интеграл существует в силу непрерывности подынтегральной функции.  $\square$

### Глава 3. Несобственные интегралы.

#### § 1. Понятие несобственного интеграла.

##### 1.1. Интегралы по промежутку $[a, b)$ .

Мы знаем, что определённым интегралом от положительной и непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$  вычисляется площадь криволинейной трапеции, или подграфика функции  $f$  на  $[a, b]$ . Подграфик, по определению, — ограниченная плоская фигура. Но площадь естественно приписывать и некоторым неограниченным плоским фигурам. Приведём два примера.

Пример 1. Подграфик функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на промежутке  $[0, 1)$  не ограничен, и значит, не может иметь площадь в обычном смысле. Но на каждом отрезке  $[0, 1-\varepsilon]$ , где  $0 < \varepsilon < 1$ , функция  $f$  интегрируема и её подграфик на  $[0, 1-\varepsilon]$  имеет площадь

$$S_\varepsilon = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon).$$

Далее,  $S_\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поскольку подграфик  $f$  на отрезках  $[0, 1-\varepsilon]$  "исчерпывают" подграфик  $f$  на промежутке  $[0, 1)$  (см. рис.), естественно приписать последнему площадь  $S = \frac{\pi}{2}$  и желать, чтобы она выражалась интегралом  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , хотя в обычном смысле он не существует из-за неограниченности подинтегральной функции.

Пример 2. Пусть  $a \in \mathbb{R}$ . Подграфик функции  $f(x) = e^{-x}$  на промежутке  $[a, +\infty)$  не ограничен. Но на каждом отрезке  $[a, t]$ ,  $a < t < +\infty$ , функция  $f$  интегрируема, и следовательно, её подграфик имеет площадь

$$S_t = \int_a^t e^{-x} dx = e^{-a} - e^{-t}.$$

Видно, что  $S_t \rightarrow e^{-a}$  при  $t \rightarrow +\infty$ . То есть мы видим, что и выше (см. рис.), естественно приписать подграфику  $f$  на промежутке  $[a, +\infty)$  площадь  $S = e^{-a}$ , и желать, чтобы она выражалась интегралом  $\int_a^{+\infty} e^{-x} dx$ , хотя в обычном смысле он не существует из-за неограниченности промежутка  $[a, +\infty)$ .

Введём следующее расширение понятия интеграла.

Определение 1. Пусть  $-\infty < a < b \leq +\infty$  и запись  $t \rightarrow b$  — означает как предельный переход  $t \rightarrow b-0$ , если  $b$  — число, так и предельный переход  $t \rightarrow +\infty$ , если  $b = +\infty$ . Пусть функция  $f$  определена на промежутке  $[a, b)$  и интегрируема на каждом отрезке  $[a, t]$ ,  $a < t < b$  (например, пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b)$ ), так что на  $[a, b)$  определена функция

$$F_f(t) = \int_a^t f(x) dx, \quad a \leq t < b, \quad F_f(a) = 0. \quad (1.1)$$

Если существует

$$\lim_{t \rightarrow b-} F_f(t) = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx = I,$$

то число  $I$  назовем интегралом функции  $f$  по промежутку  $[a, b]$  и обозначим  $I = \int_a^b f(x) dx$ , говоря при этом, что интеграл сходится. Если  $F_f(t)$  не имеет предела при  $t \rightarrow b^-$ , то будем говорить, что интеграл расходится.

Теорема 1. Если  $f$  в условиях определения 1,  $b$  - число, а функция  $f$  ограничена на  $[a, b)$ , то какое бы значение не придавать  $f(b)$ , функция  $f$  будет интегрируемой (по Риману) на отрезке  $[a, b]$  и её интеграл Римана  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx$ ; т.е., определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  равен интегралу  $\int_a^{b-} f(x) dx$  из определения 1 и последний, следовательно, сходится.

Таким образом, согласно теореме 1, определение 1 вводит новые объекты лишь, если  $b$  - число, а функция  $f$  не ограничена на  $[a, b)$ , либо если  $b = +\infty$ . В этих случаях  $\int_a^{b-} f(x) dx$  называем несобственными интегралами (в отличие от интегралов в прежнем смысле, называемых "собственными"). При этом, если  $b$  - число, вместо  $\int_a^{b-} f(x) dx$  принято использовать обозначение  $\int_a^b f(x) dx$ , а если  $b = +\infty$ , использовать обозначение  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Итак, в примерах 1 и 2,  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\int_a^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-a}$ , и в частности,  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ .

Пример 3. Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{x^s}$  на  $[a, +\infty)$ ,  $a > 0$ .

Если  $s \neq 1$ , то  $F_f(t) = \int_a^t \frac{dx}{x^s} = \frac{t^{-s+1}}{-s+1} - \frac{a^{-s+1}}{-s+1}$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(s-1)a^{s-1}}, & \text{если } s > 1, \\ +\infty, & \text{если } s < 1. \end{cases}$

Если  $s = 1$ , то  $F_f(t) = \int_a^t \frac{dx}{x} = \ln t - \ln a$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_f(t) = +\infty$ .

Таким образом, несобственный интеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ ,  $a > 0$ , сходится при всех  $s > 1$  и расходится при всех  $s \leq 1$ . При этом, если  $s > 1$ , то  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{(s-1)a^{s-1}}$ .

## 1.2. Интегралы по промежуткам $(a, b]$ и $(a, b)$ .

Пусть функция  $f$  определена на промежутке  $(a, b]$ ,  $-\infty \leq a < b < +\infty$ , и интегрируема по Риману на каждом отрезке  $[t, b]$ ,  $a < t < b$  (например, пусть  $f$  непрерывна на  $(a, b]$ ), так что на  $(a, b]$  определена функция  $F_f(t)$ ,

$$F_f(t) = \int_t^b f(x) dx, \quad a < t \leq b, \quad F_f(b) = 0. \quad (1.2)$$

Условием символом  $t \rightarrow a+$  обозначать как предельный переход  $x \rightarrow a+0$ , если  $a$  - число, так и предельный переход  $t \rightarrow -\infty$ , если  $a = -\infty$ .

Определение 2. Если существует  $\lim_{t \rightarrow a+} F_f(t) = I$ , то число  $I$  назовем интегралом функции  $f$  по промежутку  $(a, b]$  и обозначим  $\int_a^b f(x) dx$ , говоря при этом, что интеграл сходится. Если функция  $F_f(t)$

не имеет предела при  $t \rightarrow a+$ , то говорим, что интеграл расходится.  
Как и в предыдущем пункте 1.1, убеждаемся, что определение 2  
вводит новые обозначения лишь, если  $a$  - число, а функция  $f$  не ограниче-  
на на  $[a, b]$ , либо если  $a = -\infty$ . В этих случаях интеграл  $\int_{a+}^b f(x) dx$   
называется несобственным, и если  $a$  - число, то вместо обозначения  
 $\int_{a+}^b f(x) dx$  используют обозначение  $\int_a^b f(x) dx$ , а если  $a = -\infty$ , то исполь-  
зуют обозначение  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ .

Пример 4. Пусть  $f(x) = \frac{1}{(x-a)^s}$  на  $(a, b]$ , где  $b > a$  - число. Если  
 $s \neq 1$ , то  
$$\Phi_f(t) = \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \frac{(b-a)^{-s+1}}{-s+1} - \frac{(t-a)^{-s+1}}{-s+1}$$
 и  $\lim_{t \rightarrow a+0} \Phi_f(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } s \geq 1, \\ \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s}, & \text{если } s < 1. \end{cases}$   
Если  $s = 1$ , то  $\Phi_f(t) = \int_t^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(t-a)$  и  $\lim_{t \rightarrow a+0} \Phi_f(t) = +\infty$ .

Таким образом, несобственный интеграл  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s}$  сходится и  
равен  $\frac{(b-a)^{1-s}}{1-s}$ , если  $s < 1$ , и расходится, если  $s \geq 1$ .  
Аналогично несобственный интеграл  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^s}$ ,  $a < b$  - числа, сходит-  
ся и равен  $\frac{(b-a)^{1-s}}{1-s}$ , если  $s < 1$ , и расходится, если  $s \geq 1$ .

Пусть теперь функция  $f$  определена на промежутке  $(a, b)$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , и  $f$  интегрируема на каждом отрезке, содержащем  $b$   $(a, b)$   
(например, пусть  $f$  непрерывна на  $(a, b)$ ).

Определение 3. Если несобственные интегралы  $\int_a^c f(x) dx$  и  $\int_c^b f(x) dx$   
сходятся для некоторого  $c$ ,  $a < c < b$ , то их сумму  $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$   
называют несобственным интегралом функции  $f$  по промежутку  
 $(a, b)$  и обозначают  
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (1.3)$$

говоря при этом, что интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится. Во всех остальных  
случаях интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  считается расходящимся.  
Доказывается, что, в случае сходимости несобственного интеграла,  
сумма в правой части (1.3) не зависит от выбора  $c$ ,  $a < c < b$ .

Пример 5. Установим сходимость интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .  
Имеем  
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t' \rightarrow -\infty} \int_{t'}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} =$$
  
$$= \lim_{t' \rightarrow -\infty} [\arctg 0 - \arctg t'] + \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctg t - \arctg 0] = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \triangleright$$

## §2. Основные свойства несобственных интегралов.

(4)

Условимся во всех теоремах этого §2 и следующего §3 для несобственных интегралов функции  $f$  по промежуткам  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  и  $(a, b)$  использовать единое обозначение  $\int_a^b f(x) dx$  и в смысле, когда  $a, b \in \mathbb{R}$ , и когда  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ .

### 2.1. Свойства, аналогичные свойствам определенных интегралов.

Теорема 1. Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы по промежутку  $[a, b)$  (по  $(a, b]$ ), то: 1) функция  $kf$  интегрируема по  $[a, b)$  (по  $(a, b]$ ) для любого  $k \in \mathbb{R}$  и  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ ; 2) функция  $f+g$  интегрируема по  $[a, b)$  (по  $(a, b]$ ) и  $\int_a^b (f(x)+g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ; 3) если  $f(x) \geq g(x)$  для всех  $x \in [a, b)$  (для всех  $x \in (a, b]$ ), то  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ ; 4) если  $f(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a, b)$  (для всех  $x \in (a, b]$ ), то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

Для функции  $F_f(t)$  ( $\Phi_f(t)$ ), определенной функцией (1.1), §1 (функцией (1.2), §1), в силу свойства линейности определенного интеграла, справедливо  $F_{kf}(t) = k F_f(t)$ ,  $t \in [a, b)$  ( $\Phi_{kf}(t) = k \Phi_f(t)$ ,  $t \in (a, b]$ ) и существует

$$\lim_{t \rightarrow b-} F_{kf}(t) = k \lim_{t \rightarrow b-} F_f(t) = k \int_a^b f(x) dx \quad \left( \lim_{t \rightarrow a+} \Phi_{kf}(t) = k \lim_{t \rightarrow a+} \Phi_f(t) = k \int_a^b f(x) dx \right),$$

так что  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .

2) Для функции  $F_{f+g}(t)$  ( $\Phi_{f+g}(t)$ ) в силу свойства линейности определенного интеграла справедливо  $F_{f+g}(t) = F_f(t) + F_g(t)$ ,  $t \in [a, b)$  ( $\Phi_{f+g}(t) = \Phi_f(t) + \Phi_g(t)$ ,  $t \in (a, b]$ ) и поэтому существует

$$\lim_{t \rightarrow b-} F_{f+g}(t) = \lim_{t \rightarrow b-} F_f(t) + \lim_{t \rightarrow b-} F_g(t) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow a+} \Phi_{f+g}(t) = \lim_{x \rightarrow a+} \Phi_f(t) + \lim_{x \rightarrow a+} \Phi_g(t) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right),$$

$$\text{так что } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

3) В силу свойства монотонности определенного интеграла  $F_f(t) = \int_a^t f(x) dx \geq \int_a^t g(x) dx = F_g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , откуда  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-} F_f(t) \geq \lim_{t \rightarrow b-} F_g(t) = \int_a^b g(x) dx$ . Аналогично рассматриваются случаи функции  $\Phi_f(t) \geq \Phi_g(t)$ ,  $t \in (a, b]$ .

4) Согласно свойству 3),  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t 0 dx = \lim_{t \rightarrow b-} 0 = 0$ . Аналогично для интеграла по промежутку  $(a, b]$ .  $\triangleright$

### 2.2. Теоремы существования. Абсолютная сходимость.

Теорема 2. Если  $f(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a, b)$  и  $f$  интегрируема по Риману на каждом  $[a, t]$ ,  $a < t < b$ , то  $\int_a^b f(x) dx$  сходится в том и только в том случае, когда функция  $F_f(t)$  ограничена сверху на  $[a, b)$ .

Так как  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b)$ , то для любых  $a < t_1 < t_2 < b$  справедливо

$$F_f(t_2) = \int_a^{t_2} f(x) dx = \int_a^{t_1} f(x) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \geq \int_a^{t_1} f(x) dx = F_f(t_1) \geq 0.$$

Темным образом, функции  $F_f$  ~~возрастает~~ на  $[a, b)$  и, по теореме о пределе возрастающей функции, её  $\lim_{t \rightarrow b-} F_f(t)$  существует (а следовательно, сходится интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ )  $\iff$  функции  $F_f(t)$  ограничена сверху на  $[a, b)$ .

Теорема 3 (признак сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции). Пусть  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  для всех  $x \in [a, b)$  и  $f, g$  интегрируемы по Риману на каждом  $[a, t]$ ,  $a < t < b$ . Тогда сходимость  $\int_a^b g(x) dx$  влечёт сходимость  $\int_a^b f(x) dx$  (и следовательно, из расхожидости  $\int_a^b f(x) dx$  следует расхожидость  $\int_a^b g(x) dx$ ).

Δ Так как  $0 \leq f \leq g$ , то

$$0 \leq F_f(t) = \int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx = F_g(t), t \in [a, b). \quad (2.1)$$

Если  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то, по предыдущей теореме 2, функции  $F_g(t)$  ограничена сверху на  $[a, b)$ , а вместе с ней (на основании (2.1)) — и функция  $F_f(t)$ , что по той же теореме влечёт сходимость  $\int_a^b f(x) dx$ . ▸

Замечание. В доказанной теореме достаточно потребовать, чтобы  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  выполнялись на каком-нибудь меньшем промежутке  $[c, b)$ ,  $a < c < b$ . Действительно, так как  $\int_c^b f(x) dx$  по условию существует (как определённый интеграл Римана), то в силу свойства аддитивности (формула (1.3), § 1), сходимость интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  равносильна сходимости интеграла  $\int_a^c f(x) dx$ .

Пример 1. Так как  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$  для всех  $x \geq 1$  и  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$  сходится (пример 2, § 1), то сходится  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$  и  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

Теорема 4. Пусть функции  $f$  определена на промежутке  $[a, b)$  и интегрируема на каждом отрезке  $[a, t]$ ,  $a < t < b$  (например,  $f$  непрерывна на  $[a, b)$ ). Если сходится  $\int_a^b |f(x)| dx$ , то сходится  $\int_a^b f(x) dx$ , причём  $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

Δ Положим  $g = \frac{|f|+f}{2}$ ,  $h = \frac{|f|-f}{2}$ . Функции  $g, h$  интегрируемы на каждом  $[a, t]$ ,  $a < t < b$  (по свойству среднего интеграла), и  $0 \leq g \leq |f|$ ,  $0 \leq h \leq |f|$  на  $[a, b)$ . Следовательно, по теореме 3, сходимость  $\int_a^b |f(x)| dx$  влечёт сходимость  $\int_a^b g(x) dx$  и  $\int_a^b h(x) dx$ . Так как  $f = g - h$ , то, по теореме 1 этого параграфа, сходится  $\int_a^b f(x) dx$ . Наконец, поскольку  $|f| = g + h$ , имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b g(x) dx - \int_a^b h(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b g(x) dx \right| + \left| \int_a^b h(x) dx \right| = \\ &= \int_a^b g(x) dx + \int_a^b h(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned} \quad \triangleright$$

Определение 1. Интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  по промежутку  $[a, b]$  называется абсолютно сходящимся, если  $f$  интегрируема на каждом отрезке  $[a, t]$ ,  $a < t < b$  (в частности, если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ ), и сходящиеся  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

Согласно предыдущему теореме 4, каждый абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Пример 2. Интегралы  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^s} dx$ ,  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos kx}{x^s} dx$ , где  $a > 0$ , абсолютно сходятся для всех  $s > 1$ .

А так как  $|\frac{\sin kx}{x^s}| \leq \frac{1}{x^s}$ ,  $|\frac{\cos kx}{x^s}| \leq \frac{1}{x^s}$ ,  $x \geq a > 0$ , и  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$  сходится для всех  $s > 1$  (пример 3, § 1), то по теореме 3 это верно для интегралов  $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin kx|}{x^s} dx$ ,  $\int_a^{+\infty} \frac{|\cos kx|}{x^s} dx$ , и следовательно, указанные интегралы абсолютно сходятся для всех  $s > 1$ .  $\Delta$

Аналогичные результаты справедливы для функций, интегрируемых по промежуткам  $(a, b]$  и  $(a, b)$ .

### § 3. Интегрирование по частям и подстановкой в несобственных интегралах.

Все результаты этого параграфа формулируются и доказываются для интегралов по промежутку  $[a, b]$ , но их аналог справедлив для интегралов по промежутку  $(a, b]$ .

#### 3.1. Интегрирование по частям.

Теорема 1. Пусть функции  $u, v$  непрерывно дифференцируемы на промежутке  $[a, b)$ . Если сходятся  $\int_a^b u'(x)v(x) dx$  и существует  $\lim_{x \rightarrow b-} u(x)v(x)$ , то сходятся  $\int_a^b u(x)v'(x) dx$  и

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^{b-} - \int_a^b v(x)u'(x) dx, \quad (3.1)$$

в котором  $u(x)v(x) \Big|_a^{b-} = \lim_{x \rightarrow b-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ .

Из условия теоремы следует, что на каждом отрезке  $[a, t]$ ,  $a < t < b$ , справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле, согласно которой

$$\int_a^t u(x)v'(x) dx = u(t)v(t) - u(a)v(a) - \int_a^t v(x)u'(x) dx$$

и остаётся перейти к пределу при  $t \rightarrow b-$ .  $\Delta$

Пример 1. Интегралы  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^s} dx$ ,  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos kx}{x^s} dx$ , где  $k \neq 0, a > 0$ , сходятся (но не абсолютно) для всех  $s, 0 < s \leq 1$ .

Рассмотрим первый интеграл. Формальное применение формулы (3.1) даёт

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^s} dx &= \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^s} d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \left[-\frac{1}{x^s} \frac{\cos kx}{k}\right]_a^{+\infty} - \frac{s}{k} \int_a^{+\infty} \frac{\cos kx}{x^{s+1}} dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{k} \frac{\cos kx}{x^s}\right] + \frac{\cos ka}{ka^s} - \frac{s}{k} \int_a^{+\infty} \frac{\cos kx}{x^{s+1}} dx = \frac{\cos ka}{ka^s} - \frac{s}{k} \int_a^{+\infty} \frac{\cos kx}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

Так как  $s+1 > 1$  для всех  $s > 0$ , то последний интеграл сходится (даже абсолютно) (см. пример 2, § 2), а по теореме 1 сходится несобственный интеграл.

Аналогично проверяется сходимость второго интеграла.

Докажем теперь, что интегралы не сходятся абсолютно при  $0 < s \leq 1$ , т.е., в случае первого изучаемого интеграла, что расходится интеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin kx|}{x^s} dx$ ,  $k \neq 0$ , когда  $0 < s \leq 1$ . Действительно, если бы это было не так, то по признаку сравнения (теорема 3, § 2) сходился бы интеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 kx}{x^s} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2kx}{x^s} dx$  (поскольку  $|\sin kx| \geq \sin^2 kx \geq 0$ ).

Но так как, по доказанному выше,  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{x^s} dx$  сходится для всех  $s > 0$ , то отсюда следовало бы (теорема 1, § 2) сходимость  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$  для  $0 < s \leq 1$ , тогда как этот интеграл расходится при  $0 < s \leq 1$  (пример 3, § 1).

Определение 1. Несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  называется сходящимся условно, если он сходится, но не сходится абсолютно; т.е., расходится  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

Интегралы в примере 1 сходятся условно при  $0 < s \leq 1$  и сходятся абсолютно при  $s > 1$ .

Пример 2. Интеграл Дирихле  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x} dx$  сходится условно.

Этот интеграл рассматривается по промежутку  $(0, +\infty)$ . Поэтому

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin kx}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin kx}{x} dx. \quad (3.2)$$

Функция  $\frac{\sin kx}{x}$  непрерывна на  $(0, 1]$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$ , так что эта функция ограничена на  $(0, 1]$ . Поэтому (см. пункты 1.1 и 1.2, § 1) первый интеграл в сумме (3.2) сходится (как определенный интеграл Римана на  $[0, 1]$ ). Второй интеграл в сумме (3.2) сходится условно, согласно предположенному примеру 1, в котором  $s = 1$ .

Интеграл Дирихле играет фундаментальную роль в теории тригонометрических рядов Фурье, которая будет сообщена в первом семестре второго курса. Его значение вычислено Дирихле и

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } k > 0, \\ 0, & \text{если } k = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } k < 0. \end{cases} \quad (3.3).$$

### 3.2. Замена переменной интегрирования в несобственном интеграле.

Теорема 2. Пусть функция  $f$  непрерывна на промежутке  $[a, b)$ , а функция  $\varphi$  непрерывно дифференцируема на промежутке  $[\alpha, \beta)$ , строго возрастает на нем и  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta-) = \lim_{t \rightarrow \beta-} \varphi(t) = b$ . Если сходится интеграл  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ , то сходится интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  и справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (3.4)$$

На основании условий теоремы и свойств строго монотонных функций, заключаем, что образ  $\varphi([a, \beta)) = [a, b) = [\varphi(a), \varphi(\beta-))$  и что на  $[a, b)$  существует обратная к  $\varphi$  функция  $\psi$ , непрерывная на  $[a, b)$  вместе со своей производной  $\psi'$ , строго возрастающая на  $[a, b)$ , так что  $D\psi = [a, b)$ ,  $\psi(a) = a$ ,  $\psi(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} \psi(x) = \beta$ . Для произвольного  $t$ ,  $a < t < b$ , на отрезке  $[a, t]$  выполнены все условия теоремы о замене переменных и интегрирование в определенном интеграле, по которой

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^{\psi(t)} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Так как  $\lim_{t \rightarrow b-} \psi(t) = \psi(b-) = \beta$  и сходится несобственный интеграл в правой части формулы (3.4), то

$$\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^{\psi(t)} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_a^{\beta} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau.$$

Таким образом, на основании (3.5), существует

$$\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

и справедлива формула (3.4).  $\Delta$

Пример 3. Интегралы Френеля  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$  сходятся условно.

$$\Delta \text{ Имеем } \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^1 \sin(x^2) dx + \int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx,$$

где первый интеграл в сумме справа есть интеграл Римана от непрерывной функции на отрезке  $[0, 1]$ ; т.е., — некоторое число. Во втором интеграле положим  $x^2 = t$ ,  $x = \sqrt{t}$ ,  $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ , и по теореме 2 получим, что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

сходится условно (см. пример 1, в котором  $k=1$ ,  $s = \frac{1}{2}$ ).

Аналогично,

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^1 \cos(x^2) dx + \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx,$$

где первый интеграл в сумме справа есть интеграл Римана от непрерывной функции на отрезке  $[0, 1]$ ; т.е., — некоторое число, а интеграл

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt$$

сходится условно.  $\Delta$

Значения интегралов Френеля равны  $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ . Интегралы Френеля и функции Френеля

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad x \geq 0,$$

используются в приложениях: в оптике, в радиотехнике, в физике.

### 3.3. Интегральные синус и косинус.

На основании сходимости интегралов

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad a > 0, \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx, \quad a > 0,$$

определим новые элементарные функции - интегральный синус  $Si x, x \geq 0$ , и интегральный косинус  $ci x, x \geq 0$ , положив

$$Si x = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \quad x \geq 0, \quad \text{и} \quad ci x = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad x > 0.$$

Согласно свойствам аддитивности несобственных интегралов и определённых интегралов, имеем формулы

$$Si x = - \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$ci x = - \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt,$$

в которых несобственные интегралы суть некоторые числа, а интегралы с переменным верхним пределом допускают операцию дифференцирования по нему. Совершим её (с учётом, что производная постоянной равна нулю), получим формулы для производных

$$Si' x = \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0, \quad \text{и} \quad ci' x = \frac{\cos x}{x}, \quad x > 0.$$

Итак, функции  $Si x$  и  $ci x$  бесконечно дифференцируемы при  $x > 0$ ; отметим также, что  $Si 0 = -\frac{\pi}{2}$  (см. формулу (3.3)).

### 3.4. Разрывный множитель Дирхле.

Функцию  $D(x)$ ,

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad x \in \mathbb{R},$$

называем разрывным множителем Дирхле. Поскольку  $2 \sin \lambda \cos \lambda x = \sin(\lambda + \lambda x) + \sin(\lambda - \lambda x)$ , то с учётом формулы (3.3),

$$D(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda (1+x)}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda (1-x)}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(1+x) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(1-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

откуда

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ 1/2 & \text{при } x = \pm 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

С разрывным множителем Дирхле встретимся в курсе методов математической физики (предполагаю, что встретится).

#### §4. Интеграл Эйлера.

##### 4.1. Гамма-функция Эйлера.

Вместе с Эйлером рассмотрим несобственный интеграл

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad (1)$$

как функцию от  $s$ , и выясним область её определения. Для этого представим интеграл (1) в виде суммы несобственных интегралов

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = I_1(s) + I_2(s).$$

Так как  $e^{-1} x^{s-1} \leq x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s-1}$  для всех  $x \in (0, 1]$  и всех  $s \in \mathbb{R}$ , а эталонный интеграл  $\int_0^1 x^{s-1} dx$  сходится при  $s-1 > -1$ , т.е., при  $s > 0$ , и расходится при  $s \leq 0$ , то по признаку сравнения несобственных интегралов (теорема 3, §3) интеграл  $I_1(s)$  сходится при всех  $s > 0$  и расходится при всех  $s \leq 0$ .

Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$  для любого  $s \in \mathbb{R}$  и  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

сходится, то по аналогичному признаку сравнения заключаем, что несобственный интеграл  $I_2(s)$  сходится при всех  $s \in \mathbb{R}$ .

Окончательно, несобственный интеграл (1) сходится только при  $s > 0$ , т.е., область определения гамма-функции  $\Gamma(s)$  состоит из положительных чисел.

Интегрируя по частям (подстановка верхнего предела означает переход  $x \rightarrow +\infty$ ), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = \\ &= -e^{-x} x^s \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s \Gamma(s). \end{aligned} \quad (2)$$

Формула  $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$ ,  $s > 0$ , задаёт функциональное уравнение для гамма-функции.

Покажем, что при  $s = n$  натуральном  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ; т.е., гамма-функция есть обобщение понятия факториала. При  $s = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t} + 1) = 1.$$

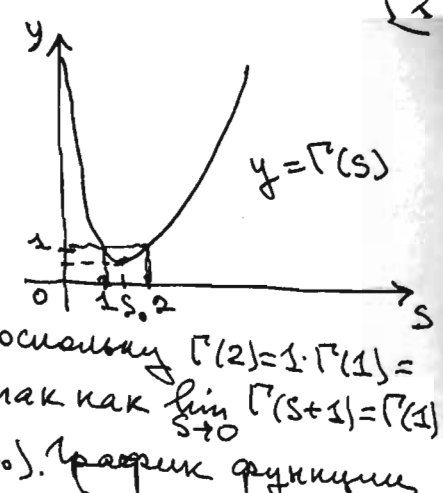
(ср. также пример 2, §1).

При натуральном  $s = n > 1$  пользуясь функциональным уравнением

$$\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1) = (n-1)(n-2) \Gamma(n-2) = \dots = (n-1)(n-2) \dots 1 \Gamma(1) = (n-1)!. \text{ Положив}$$

$0! = 1$ , получим, что равенство  $\Gamma(n) = (n-1)!$  выполняется для всех натуральных чисел.

Основным гами-функции траект фундаментальную роль во многих областях математики и её приложениях, к настоящему времени свойства этой функции изучены достаточно глубоко (составлены даже подробные таблицы её значений). В частности, известно, что  $\Gamma(s)$  бесконечно дифференцируема при  $s > 0$ , выпукла вниз ( $\Gamma''(s) > 0, s > 0$ ), достигает своего минимума в точке  $s_0$  и интервала  $(1, 2)$  ( $\Gamma(1) = 1$ ),  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Gamma(s) = +\infty$  и  $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(s+1)}{s} = +\infty$  (так как  $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1$ ); достаточно точно известны значения  $s_0$  и  $\Gamma(s_0)$ . График функции  $\Gamma(s), s > 0$ , изображён на рис.



#### 4.2. Бета-функция Эйлера.

Эйлером предложен также интеграл

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (3)$$

как функцию параметров  $p, q \in \mathbb{R}$ , которую называем бета-функцией. Представим интеграл (3) в виде суммы двух слагаемых

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = I_1(p, q) + I_2(p, q),$$

где  $I_1(p, q)$  имеет особенность только в точке  $x=0$ , а  $I_2(p, q)$  — только в точке  $x=1$ .

Так как для любого  $q \in \mathbb{R}$  функция  $(1-x)^{q-1}$  положительна, непрерывна и ограничена на отрезке  $[0, \frac{1}{2}]$ , то существуют положительные  $C_1^q, C_2^q > 0$ , что  $C_1^q x^{p-1} \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq C_2^q x^{p-1}$  для всех  $x \in (0, \frac{1}{2}]$  и всех  $p \in \mathbb{R}$ . Поэтому, как и в предыдущем пункте, убеждаемся, что интеграл  $I_1(p, q)$  сходится для всех  $q \in \mathbb{R}$  только при  $p > 0$ .

Аналогично, функция  $x^{p-1}$  положительна, непрерывна и ограничена на отрезке  $[\frac{1}{2}, 1]$  для любого  $p \in \mathbb{R}$ , и следовательно, существуют  $C_1^p, C_2^p > 0$  что  $C_1^p (1-x)^{q-1} \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq C_2^p (1-x)^{q-1}$  для всех  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$  и всех  $q \in \mathbb{R}$ . Поэтому несобственный интеграл  $I_2(p, q)$  сходится для каждого  $p \in \mathbb{R}$  только при  $q > 0$ .

Окончательно, бета-функция  $B(p, q)$  определена только для  $p > 0$  и  $q > 0$ .

Свернув в интеграле (3) замену переменной интегрирования  $x=1-t, dx=-dt$ , получим

$$B(p, q) = - \int_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = B(q, p). \quad (4)$$

Формула (4) указывает на свойство симметричности бета-функции. Интегрируя в (3) по частям и используя разложение  $x^p = x^{p-1} \cdot x$  получим

$$\begin{aligned} B(p, q+1) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \frac{x^p (1-x)^q}{p} \Big|_0^1 + \frac{q}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx = \\ &= 0 + \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \frac{q}{p} B(p, q) - \frac{q}{p} B(p, q+1), \end{aligned}$$

откуда

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q), p > 0, q > 0. \quad (5)$$

(3)

В силу симметричности функции  $B(p, q)$  имеем также

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q), p > 0, q > 0. \quad (5')$$

Формулы (5) и (5') называются функциональными уравнениями для бета-функции.

Если  $q = n \in \mathbb{N}$ , то согласно (5),

$$\begin{aligned} B(p, n) &= \frac{n-1}{p+n-1} B(p, n-1) = \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{n-2}{p+n-2} B(p, n-2) = \dots = \\ &= \frac{(n-1)(n-2) \dots 1}{(p+n-1)(p+n-2) \dots (p+1)} B(p, 1) \end{aligned}$$

Но

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p} \Big|_0^1 = \frac{1}{p},$$

так что

$$B(p, n) = \frac{(n-1)!}{p(p+1) \dots (p+n-1)}, p > 0, n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Если  $p = m \in \mathbb{N}$ , то (6) принимает вид

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{(n-1)!}{m(m+1) \dots (m+n-1)} = \frac{(n-1)! \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-1)}{1 \cdot 2 \dots (m-1) m(m+1) \dots (m+n-1)} = \\ &= \frac{(m-1)! (n-1)!}{(m+n-1)!}, m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Так как  $(m-1)! = \Gamma(m)$ ,  $(n-1)! = \Gamma(n)$  и  $(m+n-1)! = \Gamma(m+n)$ , то мы доказали частный случай

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, m, n \in \mathbb{N},$$

замечательной формулы Эйлера

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, p > 0, q > 0.$$

Гамма- и бета-функции, как и экспоненциальная функция, играют фундаментальную роль в математике и её приложениях.

#### 4.3. Формула Стирлинга

К настоящему времени свойства гамма-функции изучены достаточно глубоко. В частности, для неё доказано следующее асимптотическое представление

$$\ln \Gamma(s) = \ln \sqrt{2\pi} + (s - \frac{1}{2}) \ln s - s + \frac{\theta}{12s}, 0 < \theta < 1, \quad (7)$$

называемое формулой Стирлинга. Для натуральных  $s = n+1$ , когда  $\Gamma(n+1) = n!$ , формула (7) после несложных преобразований принимает вид

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{w}{\sqrt{n}}\right), \quad (8)$$

где  $|w| \leq 1$ .

Формулы (7) и (8) используются во многих разделах математики; в частности, - в теории вероятностей и математической статистике, входящие в учебный план шестого семестра швейцарского курса. Ещё большую роль в теории вероятностей играет интеграл Эйлера - Пуассона, рассмотренный ниже в пункте 4.4.

#### 4.4. Интеграл Эйлера - Пуассона.

Рассмотрим формулу Эйлера для значений  $p=q=\frac{1}{2}$ . Тогда в левой её части стоит

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} \Big|_0^1 = \pi,$$

а в её правой части -  $\Gamma^2(\frac{1}{2})$ , так что  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  и

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Сопоставляя,

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Если заменить  $x = -t$ ,  $dx = -dt$ , имеем

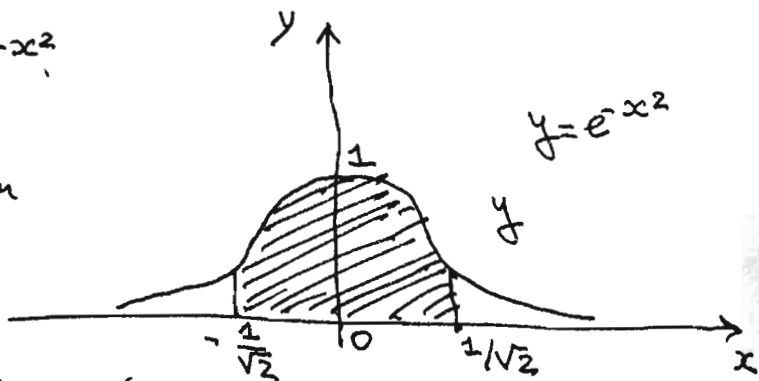
$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = - \int_{+\infty}^0 e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Поэтому,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (9)$$

Несобственный интеграл в левой части формулы (9) называют интегралом Эйлера - Пуассона.

Нанеся график функции  $f(x) = e^{-x^2}$ . Площадь её подграфика на отрезке  $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$  (точка  $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  - точки перегиба функции  $e^{-x^2}$ ) приближенно (но с большой степенью точности) равна  $\sqrt{\pi}$ .



В теории вероятностей интеграл (9) задаёт характеристику так называемому "нормальному закону распределения вероятностей", впервые изученному французским математиком А. Пуассоном в XIX в. (отсюда и появление его имени в названии интеграла). Выделенный нами интервал  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  служит для этого закона так называемым "доверительным интервалом".

## Раздел IV. Ряды.

### Глава 1. Числовые ряды.

#### §1. Ряды сходящиеся и расходящиеся.

##### 1.1. Формальное числовое ряд.

Пусть  $(a_n)$  — произвольная числовая последовательность. Складывая один за другим её члены, получаем последовательность сумм  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$ . Каждая из них, начиная со второй, получается из предыдущей прибавлением одного слагаемого — члена заданной последовательности  $(a_n)$ , имеющего тот же номер:  $S_n = S_{n-1} + a_n$  для всех  $n \geq 1$ . Поэтому процесс образования этих сумм можно представить в виде "бесконечно разветвляющейся суммы"  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ . Это не алгебраическая сумма (в алгебре определены лишь суммы конечного числа слагаемых), а запись процесса образования последовательности сумм  $(S_n)$ .

Формальное выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (1)$$

произвольная числовая последовательность  $(a_n)$ , назовём числовым рядом;  $a_1, a_2, \dots$  — его членами: первый, второй,  $\dots$ ;  $a_n$  —  $n$ -ый или общий член ряда;  $S_1, S_2, \dots$  — частичными (частичными) суммами ряда. Будем ряд (1) обозначать символом  $\sum a_n$ . Иногда нумерацию членов ряда начинаем не с 1, а с 0 (см. ниже пример 1 бесконечной симметрической прогрессии).

Определим линейные операции над рядами — сложение и умножение на число:

$$\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n) \text{ и } \lambda \sum a_n = \sum \lambda a_n.$$

##### 1.2. Сходящиеся и расходящиеся ряды.

Определение 1. Если последовательность частичных сумм  $(S_n)$  ряда  $\sum a_n$  сходится к некоторому числу  $S$ , то этот ряд назовём сходящимся, а  $S$  — его суммой. И пишут  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , или (допуская возможность в обозначениях)  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ .

Не сходящиеся ряды назовём расходящимися.

Пример 1. Бесконечная симметрическая прогрессия называется ряд  $\sum aq^{n-1}$  ( $a \neq 0$ ),  $q^0 = 1, q \in \mathbb{R}$ ; т.е. ряд  $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n + \dots$ . Как известно, для всех  $n \in \mathbb{N}$  число  $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$  вычисляется

$$S_n = \begin{cases} \frac{a - aq^n}{1 - q} & \text{при } q \neq 1, \\ na & \text{при } q = 1. \end{cases}$$

Для  $|q| < 1$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , и следовательно существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$ , так что ряд сходится к сумме  $S = \frac{a}{1 - q}$ , если  $|q| < 1$ . Для  $|q| > 1$  последовательность  $(|q^n|) = (|q|^n)$  — бесконечно возрастающая и вместе с ней бесконечно возрастают последовательности  $(q^n)$  и  $(S_n)$  (напомним, что  $a \neq 0$ ), и следовательно, ряд расходитесь, если  $|q| > 1$ . Для  $q = 1$  имеем  $S_n = an, n \in \mathbb{N}$ , и последовательность  $(S_n)$  — бесконечно возрастающая, так что ряд расходитесь, если  $q = 1$ . Наконец, если  $q = -1$ , то частичные суммы ряда

быть попеременно  $a \neq 0$  и  $0$ , и следовательно,  $(S_n)$  предела не имеет (при  $\frac{a}{1-q}$  расходится).

Окончательно, ряд  $\sum aq^{n-1}$ ,  $a \neq 0$ , сходится для всех  $q$ ,  $|q| < 1$  (и сумме  $\frac{a}{1-q}$ ).

расходится для всех  $q$ ,  $|q| \geq 1$ .

Теорема 1 (необходимый признак сходимости числового ряда). Если ряд  $\sum a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (т.е., члены сходящегося ряда образуют бесконечно малую последовательность).

Докажем это. По определению и условию существования  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , где  $S_n = S_{n-1} + a_n$ ,  $n \geq 1$ , имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ .  $\Delta$

Это важное необходимое условие не является достаточным для сходимости ряда: из того, что  $S_n - S_{n-1} = a_n \rightarrow 0$ , не следует, что  $(S_n)$  имеет конечный предел.

Пример 2. Члены ряда  $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , образуют бесконечно малую последовательность, но его частичные суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n [\sqrt{k+1} - \sqrt{k}] = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1, n \in \mathbb{N},$$

и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ ; т.е., ряд расходится.

Проверим, что линейные операции над сходящимися рядами соответствуют таким же операциям над их суммами; т.е., а) если  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  сходящиеся ряды, то  $S_n$  и  $T_n$  — их суммы, соответственно, то  $\sum a_n + \sum b_n$  сходящийся ряд, имеющий сумму  $S+T$ ; б) если ряд  $\sum a_n$  сходится к сумме  $S$ , то  $k \cdot \sum a_n$  — сходящийся ряд, сумма которого  $kS$ .

а) Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  и  $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$  — частичные суммы рядов  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$ , соответственно, а  $\sigma_n$  — частичная сумма ряда  $\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$ , т.е.,  $\sigma_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = S_n + T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . По условию, существуют  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ . Поэтому, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S+T$  и  $S+T$  — (по определению) сумма ряда  $\sum a_n + \sum b_n$ .

б) Если  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  и  $\tau_n = ka_1 + \dots + ka_n$  — частичные суммы рядов  $\sum a_n$  и  $k \sum a_n = \sum ka_n$ , соответственно, то  $\tau_n = kS_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому, по условию, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = kS$  и число  $kS$  — сумма ряда  $k \sum a_n$ .  $\Delta$

Более того заметим, что в силу свойства б) ряды  $\sum a_n$  и  $k \sum a_n$ ,  $k \neq 0$ , сходятся или расходятся одновременно.

1.2. Локальное свойство сходящихся рядов.

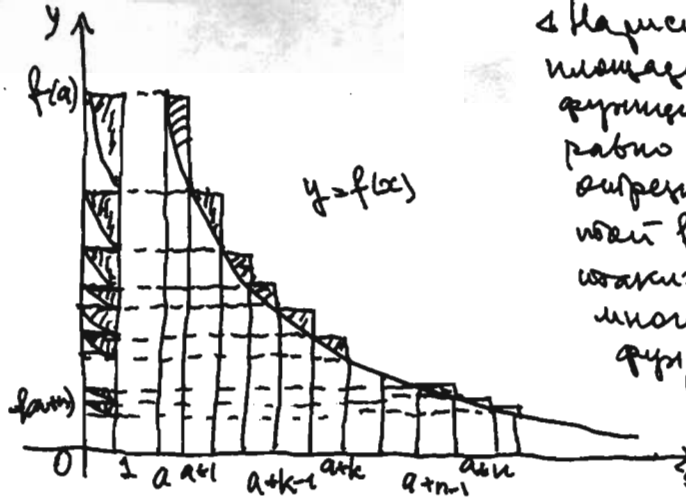
Определение 2.  $k$ -м остаточным рядом (или  $k$ -м остатком) ряда  $(1)$   $\sum a_n$  называем ряд, получаемый из  $(1)$  отбрасыванием первых  $k$  членов и нумерацией оставшихся в порядке их следования номерами  $1, 2, \dots$ , т.е. ряд  $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+p} + \dots$  (2)

Теорема 2. Два ряда  $(1)$  и  $(2)$  одновременно сходятся или расходятся.

Докажем это. Обозначим через  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\sigma_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , частичные суммы рядов  $(1)$  и  $(2)$ , соответственно. Тогда  $\sigma_p = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , и

$$S_{k+p} = a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+p} = S_k + \sigma_p. \quad (3)$$





На рисунке график функции  $f(x)$ . Число  $T_n$  равно площади криволинейной трапеции (подграфика) функции  $f$  на отрезке  $[a, a+n]$ . Число  $f(a+k-1)$  равно площади прямоугольника с основанием отрезком  $[a+k-1, a+k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ , длины 1 и высотой  $f(a+k-1)$ . Число  $S_n$  равно сумме площадей таких прямоугольников, выражает площадь многоугольной фигуры, содержащей подграфик функции  $f$  на  $[a, a+n]$ , и следовательно,  $S_n > T_n$ . Из рисунка видно, что разность  $S_n - T_n = \alpha_n$  равна сумме площадей заштрихованных "криволинейных треугольников". Так

как с увеличением номера  $n$  к пределу "треугольников" добавляются новые (заштрихованные "треугольники"), то разность возрастает. Для того, чтобы установить ограниченность этой разности, сдвинем все заштрихованные "треугольники" параллельно оси  $Ox$  в прямоугольник  $\Pi$  с основанием  $[0, 1]$  и высотой  $f(a)$ . Из рисунка видно, что сумма  $\alpha_n$  площадей меньше площади прямоугольника  $\Pi$ , т.е. меньше  $f(a)$ . Таким образом,  $0 < \alpha_n = S_n - T_n < f(a)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и, как мы знаем, последовательность  $(\alpha_n)$ ,  $\alpha_n = S_n - T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , возрастает. Но по теореме Вейерштрасса, она имеет  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = c = \sup \{\alpha_n | n \in \mathbb{N}\}$ . Поэтому,  $\alpha_n = c - \beta_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $(\beta_n)$  удовлетворяет  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ . Следовательно, формула (1) доказана. Из рисунка видно также, что число  $\alpha_n$  равно сумме площадей незаштригованных "криволинейных треугольников" которые после параллельного переноса попадают в прямоугольник  $\Pi_n$  с основанием  $[0, 1]$  и высотой  $f(a+n)$ , так что  $0 < \alpha_n < f(a+n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если, дополнительно, функция  $f$  выпукла вниз на  $[a, +\infty)$  (как на рисунке), то площадь совокупности заштригованных треугольников в  $\Pi$  составляет больше половины площади  $\Pi$ , т.е.,  $\frac{1}{2} f(a) < c < f(a)$ . Аналогично,  $\frac{1}{2} f(a+n) < \alpha_n < f(a+n)$ .

## 2.2. Гармонический ряд.

Докажем, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + c - \alpha_n, \quad (2)$$

$$\text{где } \frac{1}{2} < c < 1 \text{ и } \frac{1}{2(n+1)} < \alpha_n < \frac{1}{n+1}.$$

В предположении пункта введём функцию  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  и  $a=1$ . Так как  $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ ,  $x \geq 1$ , то  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  выпукла вниз на  $[1, +\infty)$  и по формуле (1)

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^2} + c - \alpha_n = \ln(n+1) + c - \alpha_n,$$

$$\text{где } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f(1) < c < f(1) = 1 \text{ и } \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} f(n+1) < \alpha_n < f(n+1) = \frac{1}{n+1}.$$

Число  $c$ ,  $\frac{1}{2} < c < 1$ , в формуле (2) называется константой Эйлера. Постоянная Эйлера встречается во многих вопросах математики и её значение вычислено с большой точностью:  $c = 0,577215664901...$ . Кстати, до сих пор не известна природа постоянной Эйлера: является ли она рациональным или иррациональным числом и т.п.

Числовой ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum \frac{1}{n}$  называется гармоническим рядом; он расходится, так как для любого  $\epsilon$  сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \text{ согласно (2), справедливо } S_n = \ln(n+1) + c - \alpha_n, n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \text{ и следовательно, } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty. \text{ Отметим, при этом, что для любого } \epsilon \text{ числа } a_n = \frac{1}{n} \text{ имеем } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

### 2.3. Эталонные ряды.

Докажем равенство

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} + C_p - \alpha_n, n \in \mathbb{N}, 0 < p \neq 1, \quad (3)$$

в котором  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ .

Функция  $f(x) = \frac{1}{x^p}, p > 0$ , удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1 и выпукла вниз на  $[1, +\infty)$ ,  $a=1$ . Если  $0 < p \neq 1$ , то

$$\sigma_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}, n \in \mathbb{N},$$

и  $1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} = f(1) + f(2) + \dots + f(n), n \in \mathbb{N}$ . Поэтому (1) переходит в (3), в которой  $\frac{1}{2} < C_p < 1, \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)^p} < \alpha_n < \frac{1}{(n+1)^p}$ .  $\triangleright$

Ряд  $\sum \frac{1}{n^p}$  называют эталонным. Если  $p < 0$ , то его общий член  $a_n = \frac{1}{n^p} \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , и ряд расходится в силу необходимого признака сходящихся рядов. По той же причине ряд расходится, если  $p=0$ , поскольку тогда  $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$ , и постоянная последовательность  $(a_n)$  не бесконечно мала. При  $p=1$  ряд расходится и исследовать  $S_n$  ряда имеет вид  $S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbb{N}$ , и согласно (3),  $S_n = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} + C_p - \alpha_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{p-1} + C_p, & \text{если } p > 1 \\ +\infty, & \text{если } 0 < p \leq 1 \end{cases}$ . Следовательно, ряд  $\sum \frac{1}{n^p}$  сходится абсолютно при  $p > 1$  (и имеет сумму  $S$  число  $\frac{1}{p-1} + C_p$ ).

Для суммы  $\tau_n$   $n$ -го остатка ряда имеет формулу  $\tau_n = S - S_n = \frac{1}{p-1} + C_p - \left[ \frac{(n+1)^{1-p}}{p-1} + \frac{1}{p-1} + C_p - \alpha_n \right] = \frac{1}{p-1} \frac{1}{(n+1)^{p-1}} + \alpha_n$ , где  $\frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)^p} < \alpha_n < \frac{1}{(n+1)^p}$ , которая указывает на скорость сходимости ряда к нулю последовательности  $(\tau_n)$  (т.е., на скорость сходимости ряда).

### 2.4. Интегральный признак сходимости ряда.

Теорема. Если функция  $f(x)$  непрерывна, положительна и убывает на промежутке  $[1, +\infty)$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , то ряд  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots, n \in \mathbb{N}$ , (4)

и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \quad (5)$$

одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Рассмотрим частные суммы  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n), n \in \mathbb{N}$ , ряда (4) и числовую последовательность  $(\sigma_n)$ ,  $\sigma_n = \int_1^{n+1} f(x) dx, n \in \mathbb{N}$ .

последовательность  $(\sigma_n)$  возрастает, поскольку  $f(x) \geq 0, x \in [1, \infty)$  и

$$\sigma_{n+1} = \int_1^{n+2} f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx + \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \geq \int_1^{n+1} f(x) dx = \sigma_n, n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, согласно определению пункта 2.1,  $s_n = \sigma_n + C - \alpha_n, n \in \mathbb{N}$ , где  $C$  - некоторая константа и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ . Эта формула показывает, что последовательности  $(s_n)$  и  $(\sigma_n)$  сходятся или расходятся одновременно, и следовательно, ряд (4) сходится тогда и только тогда, когда сходится возрастающая последовательность  $(\sigma_n)$ .

Покажем, что  $(\sigma_n)$  сходится в том и только в том случае, когда сходится несобственный интеграл (5). Для этого начнем сначала, что так как  $f(x) \geq 0, x \in [1, +\infty)$ , интеграл (5) сходится тогда и только тогда, когда положительная и возрастающая на  $[1, \infty)$  функция  $F_f(t) = \int_1^t f(x) dx$  ограничена сверху (критерий сходимости несобственного интеграла от положительной функции). Заметим также, что  $F_f(n+1) = \sigma_n, n \in \mathbb{N}$ . Если теперь интеграл (5) сходится и функцию  $F_f(t)$  ограничена сверху на  $[1, +\infty)$ , то, в частности, ограничена сверху её значения  $F_f(n+1) = \sigma_n, n \in \mathbb{N}$ , так что возрастающая последовательность  $(\sigma_n)$  сходится (теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности). Если, обратно, сходится последовательность  $(\sigma_n)$ , то она ограничена сверху, т.е.,  $0 \leq \sigma_n \leq C, n \in \mathbb{N}$ . Для произвольного  $t \in [1, +\infty)$  существует натуральное  $n > t-1$ , или  $n+1 > t$  (свойство архимедовости множества  $\mathbb{R}$ ). Тогда

$$C \geq \sigma_n = F_f(n+1) = \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^t f(x) dx + \int_t^{n+1} f(x) dx \geq \int_1^t f(x) dx = F_f(t),$$

так что  $F_f(t)$  ограничена сверху на  $[1, +\infty)$  числом  $C \geq 0$  и интеграл (5) сходится.  $\Delta$

### §3. Положительные и знакопеременные ряды.

Ряд  $\sum u_n$  называют положительным, если среди его членов  $u_n$  нет отрицательных (таким образом, все  $u_n \geq 0$ ). Частные суммы  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k, n \in \mathbb{N}$ , положительного ряда  $\sum u_n$  возрастают  $s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geq s_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ , и положительны. На этом свойстве базируется критерий сходимости положительных рядов.

Теорема. Для сходимости положительного ряда необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частных сумм была ограничена сверху. В случае сходимости положительного ряда  $\sum u_n$  к сумме  $S$ , все его частные суммы  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . И так как последовательность частных сумм положительного ряда возрастает, то для её сходимости (к сумме ряда) необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху, и по этой же теореме Вейерштрасса  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S = \sup \{s_n; n \in \mathbb{N}\}$ .  $\Delta$

Теорема (сравнительный признак сходимости положительных рядов).

Если для членов положительных рядов  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$  выполнены соотно-

цены  $u_n \leq cV_n, n \in N$ , в которых  $0 < c < +\infty$ , то из сходимости ряда  $\sum V_n$  следует сходимость ряда  $\sum u_n$  и неравенство для сумм  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq c \sum_{n=1}^{\infty} V_n$  (и следовательно, расходимость ряда  $\sum u_n$  влечёт расходимость ряда  $\sum cV_n$  и расходимость ряда  $\sum V_n$ ).

Пусть  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$  и  $t_n = \sum_{k=1}^n V_k, n \in N$ , — частичные суммы рядов  $\sum u_n$  и  $\sum V_n$ . Тогда  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n cV_k = ct_n, n \in N$ . Если сходится ряд  $\sum V_n$ , то, по предшествующему критерию, ограничена сверху последовательность  $(t_n)$  и следовательно,  $ct_n \leq M < +\infty$  для всех  $n \in N$ . Поэтому,  $s_n \leq M, n \in N$ , и по тому же критерию, сходится ряд  $\sum u_n$ .  $\triangleright$

### 3.2. Признаки Даламбера и Коши сходимости положительных рядов.

Теорема 1 (признак Даламбера). Если для всех достаточно больших  $n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \quad (1)$$

то положительный ряд  $\sum u_n$  сходится.

Не нарушая общности, можем считать, что неравенства (1) верны при всех значениях  $n$ , так как в противном случае мы могли бы ограничиться только изменением конечного числа членов ряда (это не влияет на свойство сходимости ряда). Из неравенств (1) следует

$$u_2 \leq q u_1, u_3 \leq q \cdot u_2 \leq u_1 q^2, u_4 \leq q u_3 \leq u_1 q^3, \dots, u_n \leq u_1 q^{n-1}, \dots$$

На основании этих неравенств, свойства сходимости бесконечной геометрической прогрессии и признака сравнения положительных рядов (пункт 3.1), заключаем, что ряд  $\sum u_n$  сходится.  $\triangleright$

Следствие (предельная форма признака Даламбера). Если для положительного ряда  $\sum u_n$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$ , то ряд сходится при  $d < 1$ , расходится при  $d > 1$ , а при  $d = 1$  он может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если  $d < 1$  и  $d < q < 1$ , то неравенства  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$  будут справедливы для всех достаточно больших  $n$ . Отсюда, в силу доказанного признака Даламбера, следует сходимость ряда  $\sum u_n$ . Если  $d > 1$ , то неравенства  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, u_{n+1} > u_n$ , будут справедливы для всех достаточно больших  $n$ . Строго возрастающая последовательность положительных чисел не может сходиться к нулю; т.е. ряд расходится. Для гармонического ряда  $\sum \frac{1}{n}$  число  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  и ряд расходится. Для ряда  $\sum \frac{1}{n^2}$  число  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(1 + \frac{1}{n})^2} = 1$ .  $\triangleright$

Теорема 2 (предельная форма признака Коши). Если для положительного ряда  $\sum u_n$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = c$ , то ряд сходится при  $c < 1$ ,

расходится при  $c > 1$ , а при  $c = 1$  он может быть как сходящимся, так и расходящимся.

1 Если  $c < 1$  и  $c < q < 1$ , то неравенства  $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ ,  $u_n < q^n$  будут справедливыми для всех достаточно больших  $n$ . Отсюда, на основании признака сравнения положительных рядов и свойства сходимости бесконечной геометрической прогрессии, заключаем, что  $\sum u_n$  сходится. Если  $c > 1$ , то неравенства  $\sqrt[n]{u_n} > 1$ ,  $u_n > 1$  будут справедливыми для всех достаточно больших  $n$ , и последовательность  $(u_n)$  не может сходиться к нулю; и.е. ряд расходится.

Осталось рассмотреть случай, когда  $c = 1$ . С этой целью покажем сначала, что  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Действительно, положив  $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$ ,  $\alpha_n > 0$ , получим (по формуле бинома)

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^n > \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2.$$

откуда  $\alpha_n^2 < \frac{2}{n-1}$ ,  $n > 1$ , и  $\alpha_n^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , и следовательно,  $\alpha_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , так что  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

Для расходящегося гармонического ряда  $\sum \frac{1}{n}$ ,  $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow +\infty$ , и для сходящегося ряда  $\sum \frac{1}{n^2}$  число  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^2 = 1$ .  $\Delta$

### 3.3. Знакопередающие ряды.

Знакопередающими называют ряды вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum (-1)^{n-1} u_n, \quad (2)$$

где  $u_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Теорема (признак Бернулли - Лейбница). Если последовательность  $(u_n)$  убывает,  $u_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , то ряд  $\sum (-1)^{n-1} u_n$  сходится и для его суммы  $S$  справедливы оценки  $0 \leq S \leq u_1$ .

1 Рассмотрим частичные суммы ряда (2), только с четными номерами. Так как, по условию теоремы, последовательность  $(u_n)$  убывает, и.е.,  $u_n \geq u_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $u_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$S_{2k} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2k-1} - u_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2k-1} - u_{2k}) \geq 0$$

$$S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} \leq u_1;$$

и.е.,  $0 \leq S_{2k} \leq u_1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , и  $(S_{2k})$  - ограничена. Кроме того,  $S_{2k+2} = S_{2k} + u_{2k+1} - u_{2k+2} \geq S_{2k}$ ; и.е.,  $(S_{2k})$  возрастает. По теореме Вейерштрасса, существует  $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k} = S$  и  $0 \leq S \leq u_1$  (в силу свойства монотонности предела последовательности).

Так как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , то для четных сумм с некоторыми номерами имеем  $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (S_{2k} + u_{2k+1}) = S + 0 = S$ . По теореме о равенстве пределов последовательности, существует  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ ; и.е.,  $S$  - сумма ряда  $\sum (-1)^{n-1} u_n$  и  $0 \leq S \leq u_1$ .  $\Delta$

Замечание 1. Так как каждый остаток знакопередающего ряда сам является знакопередающим рядом, то сумма  $\gamma_k$   $k$ -го остатка ряда (2) в теореме Бернулли - Лейбница для любого  $k \in \mathbb{N}$  имеет оценки  $0 \leq |\gamma_k| \leq u_{k+1}$  и  $\operatorname{sgn} \gamma_k = \operatorname{sgn} (-1)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Замечание 2. Сходимость в доказанной теореме сохраняется, если убывание последовательности  $(u_n)$  начинается только с некоторого номера  $N$ . Действительно, изменив первые  $N$  членов этого ряда (что не нарушает сходимости ряда в силу свойства локальности), положив  $u_n = u_N + N - n$  при всех  $n < N$ , так изменённая последовательность  $(u_n)$  будет уже убывающей и можно применить признак Бернулли - Лейбница.

Пример. Найдём сумму ряда Лейбница  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ .

1 Ряд сходится по признаку Бернулли - Лейбница, так как последовательность  $(u_n)$ ,  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , строго убывает и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Применяя формулу (2) из пункта 2.2, § 2, получим

$$S_{2m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2m}\right) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}) =$$

$$= \ln(2m+1) + c - \alpha_{2m} - (\ln(m+1) + c - \alpha_m) = \ln \frac{2m+1}{m+1} + \beta_m,$$

где  $\beta_m = \alpha_m - \alpha_{2m}$  и  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{2m} = 0$ . Тогда  $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$  и поэтому  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \ln \frac{2m+1}{m+1} = \ln 2$ , и так как ряд Лейбница сходится к некоторой сумме  $S$ , то  $S = \ln 2$ . Итак,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$ .

#### § 4. Знакопеременные ряды.

Займёмся изучением рядов вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum a_n, \quad (1)$$

знаки членов которых произвольны.

##### 4.1. Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема. Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа  $\varepsilon$  ( $> 0$ ) можно было указать такой номер  $N$ , что неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad (2)$$

будет справедливо для любых натуральных  $n \geq N$  и  $p \geq 1$ .

1 Согласно критерию Коши сходимости числовой последовательности, для сходимости последовательности  $(S_n)$  частичных сумм  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа  $\varepsilon$  ( $> 0$ ) можно было указать такой номер  $N$ , что неравенство

$$|S_m - S_n| < \varepsilon \quad (3)$$

Верно, если  $m, n \geq N$ . Считая  $m > n$ ,  $m = n + p$ , заключаем, что

$$S_m - S_n = S_{n+p} - S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$$

и неравенство (3) принимает вид неравенства (2).  $\Delta$

#### 4.2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Доказанный критерий, будучи весьма полезным в теоретических исследованиях, не очень удобен в практическом применении. Было бы поэтому интересно перенести удобные признаки сходимости положительных рядов на некоторые ряды с произвольными знаками их членов. Для решения этой проблемы наряду с рядом (1) рассмотрим ещё положительный ряд

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots = \sum |a_n|, \quad (4)$$

члены которого равны абсолютным значениям членов ряда (1).

Убедимся прежде всего в том, что ряд (1) непременно сходится, если сходится ряд (4).

С этой целью возьмём произвольное положительное число  $\varepsilon (> 0)$ . В силу критерия Коши, найдётся такой номер  $N$ , что неравенство

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \quad (5)$$

будет верно, если  $n \geq N$  и  $p \geq 1$ . Так как абсолютная величина суммы не больше суммы абсолютных величин слагаемых, то вместе с неравенством (5) справедливо также неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad n \geq N, p \geq 1;$$

и следовательно, ряд (1) сходится.  $\Delta$

Числовой ряд называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд, состоящий из абсолютных величин его членов:

Мы доказали, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Но далеко не все сходящиеся ряды абсолютно сходятся. Так, например, ряд Лейбница  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$  сходится (к сумме  $\ln 2$ ), но ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ , составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Ряды, сходящиеся не абсолютно, называются условно сходящимися.

Ряд Лейбница — условно сходящийся ряд.

#### 4.3. Признаки Даламбера и Коши абсолютной сходимости рядов.

Теорема 1 (признак Даламбера). Если для ряда (1)  $\sum a_n$  существует

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = d$ , то ряд абсолютно сходится, когда  $d < 1$ , и расходится, когда  $d > 1$ , а при  $d = 1$  он может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если  $d < 1$ , то по признаку Даламбера для положительных рядов сходится ряд (4)  $\sum |a_n|$ , и следовательно, ряд (1)  $\sum a_n$  абсолютно сходится. Если  $d > 1$ , то как доказано в этом же признаке, последовательность  $(|a_n|)$  не может быть бесконечно малой, и вместе с ней не может быть таковой последовательность  $(a_n)$ , и следовательно, ряд (1) расходится (по необходимому признаку сходящихся рядов). Примеры рядов в случае  $d = 1$  рассмотрим ниже:  $\sum \frac{1}{n}$  и  $\sum \frac{1}{n^2}$ .  $\Delta$

Теорема 2 (признак Коши). Если  $\lambda$  ряда (1)  $\sum a_n$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ , то ряд (1) сходится абсолютно, когда  $\lambda < 1$ , и расходится, когда  $\lambda > 1$ ; при  $\lambda = 1$  ряд может как сходиться, так и расходиться.

Если  $\lambda < 1$ , то по признаку Коши для положительных рядов сходится ряд (4)  $\sum |a_n|$ , следовательно, абсолютно сходится ряд (1). Если  $\lambda > 1$ , то, как показано в доказательстве того же признака, последовательность  $(|a_n|)$  не может быть бесконечно малой, а вместе с ней этим свойством обладает последовательность  $(a_n)$ ; т.е., ряд (1) расходится. Примеры рядов в случае  $\lambda = 1$  рассмотрены выше.  $\triangleright$

4.4. Действия (операции) над рядами.

Теорема 3. Любая алгебраическая сумма абсолютно сходящихся рядов образует абсолютно сходящийся ряд.

Нужно доказать, что суммы  $\sum a_n + \sum b_n$  и ряд  $\lambda \sum a_n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  — произвольное число, абсолютно сходящихся рядов  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  образуют абсолютно сходящиеся ряды.

Второе утверждение тривиально, если  $\lambda = 0$ : тогда  $0 \sum a_n = \sum 0 a_n = \sum 0$ . Пусть  $\lambda \neq 0$  — произвольное. Берём произвольное число  $\varepsilon > 0$  и согласно критерию Коши сходимости ряда  $\sum |a_n|$  найдём такой индекс  $N$ , что  $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$  для всех  $n \geq N$  и  $p \geq 1$ . Тогда неравенство

$|\lambda a_{n+1}| + |\lambda a_{n+2}| + \dots + |\lambda a_{n+p}| = |\lambda| (|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}|) < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$  справедливо для всех  $n \geq N$  и  $p \geq 1$ , так что сходится ряд  $\sum |\lambda a_n|$  и, значит, ряд  $\lambda \sum a_n = \sum \lambda a_n$  сходится абсолютно (к сумме  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ).

Для доказательства первого утверждения опять рассмотрим произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Согласно критерию Коши сходимости рядов (пункт 4.1), применённому к рядам  $\sum |a_n|$  и  $\sum |b_n|$ , существует такой индекс  $N_1$ , что неравенство

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

справедливо для всех  $n \geq N_1$  и  $p \geq 1$ , и существует такой индекс  $N_2$ , что неравенство

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots + |b_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

справедливо для всех  $n \geq N_2$  и  $p \geq 1$ . Положим  $N = \max(N_1, N_2)$ . Тогда для всех  $n \geq N$  и  $p \geq 1$  выполнены оба неравенства (5) и (6), и по той же оценке

$$\begin{aligned} & |a_{n+1} + b_{n+1}| + |a_{n+2} + b_{n+2}| + \dots + |a_{n+p} + b_{n+p}| \leq \\ & \leq |a_{n+1}| + |b_{n+1}| + |a_{n+2}| + |b_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| + |b_{n+p}| = \\ & = (|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|) + (|b_{n+1}| + \dots + |b_{n+p}|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

имеют место для всех  $n \geq N$  и  $p \geq 1$ . По критерию Коши (пункт 4.1), сходится ряд  $\sum |a_n + b_n|$ , так что абсолютно сходится ряд  $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ .  $\triangleright$

Рассмотрим теперь ряд (1)  $\sum a_n$  произвольного вида. К §1 этой главы доказано, что если ряд сходится, то сходится ряд  $\sum k a_n$  при любом  $k \in \mathbb{R}$ , т.е. что умножение сходящегося ряда на число подчиняется дистрибутивному закону:

$$k(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) = k a_1 + k a_2 + \dots + k a_n + \dots$$

Потем, что и сочетательный закон переносится на сходящиеся ряды (правда, в конечном объёме).

4 Предположим, что ряд (1)  $\sum a_n$  сходится к сумме  $S$ . Потем, что ряд

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots \quad (7)$$

также сходится и его сумма равна  $S$ . Пусть  $\sigma_k, k \in \mathbb{N}$ , — частичные суммы ряда (7),

$$\sigma_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}) = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_k} = S_{n_k},$$

где  $S_{n_k}$  — частичная сумма ряда (1), отвечающая индексу  $n_k \in \mathbb{N}$ . Таким образом, последовательность  $(\sigma_k)$  частичных сумм ряда (7) образует подпоследовательность  $(S_{n_k})$  последовательности  $(S_n)$  частичных сумм ряда (1). Поскольку ряд (1) сходится к сумме  $S$ , то  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_{n_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_k$ , и следовательно, ряд (7) сходится к сумме  $S$ .  $\triangleright$

Однако, из сходимости ряда (7) не следует сходимость ряда (1).

4 В самом деле, ряд

$$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$$

сходится к сумме  $S = 0$ , а ряд

$$1-1+1-1+\dots+1-1+\dots$$

расходится (но общий член не стремится к нулю).  $\triangleright$

Но, если слагаемые в каждой скобке ряда (7) сохраняют знак; т.е.,  $a_i a_j \geq 0, n_k+1 \leq i, j \leq n_{k+1}, k \in \mathbb{N}$ , то из сходимости ряда (7) следует сходимость ряда (1) к той же сумме.

4 Пусть  $n$  — произвольное натуральное число. Лемма, что  $n$  принадлежит только одному из промежутков  $[n_k+1, n_{k+1}]$ ,  $n_k+1 \leq n \leq n_{k+1}$ . Поэтому,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_n = \sigma_k + a_{n_k+1} + \dots + a_n$$

$$\text{и} \quad |S_n - \sigma_k| = |a_{n_k+1} + \dots + a_n|.$$

Но ~~числа~~ числа  $a_j, n_k+1 \leq j \leq n_{k+1}$ , одного знака, и следовательно,

$$|S_n - \sigma_k| \leq |a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}}| = |\sigma_{k+1} - \sigma_k|. \quad (8)$$

Так как ряд (7) сходится к некоторой сумме  $\sigma$ , то  $\sigma = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_{k+1}$  и  $\sigma_{k+1} - \sigma_k \rightarrow \sigma - \sigma = 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Таким образом, на основании (8),  $S_n \rightarrow \sigma$  при  $n \rightarrow +\infty$ .  $\triangleright$

Известно, что для конечных сумм верен переместительный закон (при перестановке мест слагаемых сумма не меняется). Будет ли справедлив этот закон для рядов? Оказывается, что переместительный закон распространяется на ряды, сходящиеся абсолютно, и не переносится на ряды, сходящиеся условно.

**Теорема 4 (Копи - Абель).** При перестановке членов абсолютно сходящегося ряда его сумма не меняется.

Пусть ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно; т.е., сходится ряд  $\sum |a_n|$ . После перестановки членов ряда  $\sum a_n$  получим новый ряд, у которого на первом месте стоит некоторое число  $a_{n_1}$ , на втором месте стоит число  $a_{n_2}$  (и не обязательно, чтобы  $n_2 > n_1$ ) и т.д., на  $k$ -ом месте стоит число  $a_{n_k}$  и т.д. Таким образом, после перестановки получился ряд  $\sum a_{n_k}$ . Теорема утверждает, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ .

Рассмотрим вначале случай, когда все  $a_n \geq 0$ . Возьмем произвольное  $k \in \mathbb{N}$  и обозначим через  $m = \max(n_1, n_2, \dots, n_k)$ . Тогда  $\sum_{i=1}^k a_{n_i} \leq \sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$ , где  $S$  - сумма ряда  $\sum a_n$  (см. теорему пункта 3.1, § 3). Таким образом, все частичные суммы  $\sum_{i=1}^k a_{n_i}$  ряда  $\sum a_{n_k}$  ограничены сверху числом  $S$  и по той же теореме ряд  $\sum a_{n_k}$  сходится, а его сумма  $S' \leq S$ ; т.е., при перестановке слагаемых сумма не увеличивается. Но ряд  $\sum a_n$  получается из ряда  $\sum a_{n_k}$  при обратной перестановке членов, и поэтому,  $S \leq S'$ . Отсюда следует, что  $S' = S$ .

В общем случае заметим, что  $a_n = (|a_n| + a_n) - |a_n|$  и так как  $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$  и по условию  $\sum |a_n|$  сходится, то по признаку сравнения, сходится положительный ряд  $\sum (|a_n| + a_n)$ . По доказанному,  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + a_{n_k})$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|$ . Поэтому,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + a_{n_k}) - \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ .  $\triangleright$

**Теорема 5 (Риман).** Для всякого условно сходящегося ряда найдется перестановка его членов, можно получить ряд, сходящийся к любой наперед заданной сумме, или расходящийся.

Рассмотрим эту теорему примером условно сходящегося ряда Лейбница  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ . Мы знаем, что его сумма равна  $\ln 2$ ; т.е.  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$

Переставим теперь члены этого ряда: одно слагаемое положительное - два отрицательных:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ & = (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ & = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots) = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

и сумма ряда уменьшилась вдвое.

## §5. Формула Тейлора. Ряд Тейлора.

### 5.1. Формула Тейлора.

Предположим, что интервал  $(\alpha, \beta)$ ,  $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ , входит в область определения  $D_f$  функции  $f$  и  $a$  — точка интервала, в которой функция  $f$  имеет производные до порядка  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , включительно. Тогда можно рассмотреть алгебраический многочлен  $T_n(x; f) = T_n(x)$  степени  $n$  вида

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

который называем многочленом Тейлора функции  $f$  с центром в точке  $x=a$ .

Положим  $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$ ,  $x \in (\alpha, \beta)$ , и изучим величину  $R_n(x)$  как на всем интервале  $(\alpha, \beta)$ , так и вблизи точки  $x=a$ . С этой целью предполагаем, дополнительно, функцию  $f$  имеющей в  $(\alpha, \beta)$  непрерывную производную  $f^{(n+1)}(x)$  и рассмотрим интеграл

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt, \quad x \in (\alpha, \beta),$$

к которому применимо интегрирование по частям

$$u = (x-t)^n \quad dv = f^{(n+1)}(t) dt \\ du = -n(x-t)^{n-1} dt, \quad v = f^{(n)}(t),$$

так что

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t) \Big|_a^x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + I_{n-1}(x).$$

Пользуясь и далее этой рекуррентной формулой, найдем

$$I_n(x) = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + I_{n-2}(x) = \dots = \\ = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} - \dots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + I_0(x).$$

Но  $I_0(x) = \int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$

Следовательно,

$$I_n(x) = -\left\{ f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right\} + f(x). \quad (5.1)$$

Выражение в фигурных скобках есть многочлен Тейлора  $T_n(x)$ , так что формула (5.1) принимает вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad x \in (\alpha, \beta), \quad (5.2)$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt, \quad x \in (\alpha, \beta). \quad (5.3)$$

Равенство (5.2) называем формулой Тейлора функции  $f(x)$ ; величина  $R_n(x)$  в (5.2) и (5.3) называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме.

Итак, (5.2) и (5.3) — формула Тейлора функции  $f$  в интервале  $(\alpha, \beta)$  с остаточным членом в интегральной форме.

Заметим, что функции  $(x-t)^n$  не обращаются в нуль в интервале  $(a, x)$ . Это обстоятельство позволяет применить к интегралу (5.3) общую теорему о среднем значении интеграла, согласно которой

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad c = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1. \quad (5.4)$$

Равенство (5.4) даёт выражение остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа.

В практическом использовании формулы Тейлора удобна её частная форма, когда  $a=0$  (интервал  $(\alpha, \beta)$  содержит  $x=0$ ). К этому случаю формулы (5.2)–(5.4) принимают вид

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \quad (5.2')$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dx \quad (5.3')$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (5.4')$$

называемых также формулами Маклорена функции  $f(x)$  с остаточными членами в интегральной форме и в форме Лагранжа.

### 5.2. Ряд Тейлора.

Пусть теперь функция  $f$ , определённая в  $(\alpha, \beta)$ , бесконечно дифференцируема в точке  $a \in (\alpha, \beta)$ . Тогда каждой точке  $x \in (\alpha, \beta)$  можно сопоставить ряд

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (5.5)$$

называемый рядом Тейлора функции  $f$  с центром в точке  $x=a$ .

Зададимся вопросом: если ряд (5.5) сходится в точке  $x \in (\alpha, \beta)$ , то будет ли его сумма равна значению  $f(x)$  в точке  $x$  функции  $f$ , его породившей. Ответ всегда положительный для точки  $x=a$ , но не обязательно положительный для  $x \neq a$ .

Пример 1. Функция  $f_0(x)$ ,  $f_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}, & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$

бесконечно дифференцируема в любой точке  $x \neq a$ . Покажем, что она обладает этим свойством также в точке  $x=a$ , и что  $f_0^{(n)}(a) = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Положим  $x-a=t$  и рассмотрим функцию  $g(t)$ ,

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & \text{если } t \neq 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируемо для всех  $t \neq 0$ . Покажем, что она бесконечно дифференцируема также для  $t=0$ , и что  $g^{(n)}(0) = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , так что  $f_0^{(n)}(a) = g^{(n)}(0) = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Доказательство проведём методом математической индукции.

Но предварительно отметим, полагая  $\frac{1}{t^2} = y$ ,  $\bar{t} = \pm \sqrt{y}$ , что для любого алгебраического многочлена  $P_m(t)$  произвольной степени  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_m\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} P_m(\pm \sqrt{y}) e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{P_m(\pm \sqrt{y})}{e^y} = 0.$$

Теперь, по определению,  $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0$ , и у нас выполнен первый шаг индукции. Далее, для любого  $t \neq 0$  имеем

$$g'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}, \quad g''(t) = -\frac{2 \cdot 3}{t^4} e^{-\frac{1}{t^2}} + \frac{2}{t^3} \cdot \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} = \left( \frac{4}{t^2 \cdot 3} e^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{6}{t^4} e^{-\frac{1}{t^2}} \right), \dots,$$

$g^{(n)}(t) = P_{3n}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}, t \neq 0, n \in \mathbb{N}$ . Ваш предположить, что доказано справедливо  $g^{(n)}(0) = 0$ , что, по определению,

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^{(n)}(t) - g^{(n)}(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} g^{(n)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} P_{3n}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

и доказательство закончено.  $\Delta$

Таким образом, все числовые коэффициенты ряда Фейстера функции  $f_0$  с центром в точке  $x=a$  равны нулю и поэтому ряд сходится к нулю для всех  $x \in \mathbb{R}$ , в то время как  $f_0$  обращается в нуль только при  $x=a$ .

Возникает вопрос: когда функция  $f$ , порождающая ряд Фейстера (5.5), является его суммой? Поскольку частными суммами  $S_n(x), n \in \mathbb{N}$ , ряда (5.5) служат многочлены Фейстера  $T_n(x; f) = T_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то сумма ряда  $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$  совпадает с  $f(x)$  для  $x \in (\alpha, \beta)$ , тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x) - T_n(x)] = 0$  для  $x \in (\alpha, \beta)$ . Некоторое достаточное условие для этого даёт формула Фейстера.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  бесконечно дифференцируема в интервале  $(\alpha, \beta)$  и  $a \in (\alpha, \beta)$  — фиксированная точка. Если на отрезке  $[a, x]$ ,  $x \in (\alpha, \beta)$ , все производные функции ограничены одним и тем же числом:  $|f^{(n)}(t)| \leq M, a \leq t \leq x, n \in \mathbb{N}$ , и  $M > 0$  — фиксированная константа, то ряд Фейстера (5.5) функции  $f$  с центром в  $x=a$  сходится в точке  $x$  к значению  $f(x)$ .

Для удобства условия теоремы и остаточным членом формулы Фейстера в форме Лагранжа, получим оценку

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Чтобы убедиться в том, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при  $n \rightarrow +\infty$ , рассмотрим ряд

$$M + M|x-a| + \dots + \frac{M}{n!} |x-a|^n + \dots \quad (5.6)$$

применяя к нему признак Даламбера, получим для  $x \neq a$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}}{\frac{M}{n!} |x-a|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-a|}{n+1} = 0 < 1.$$

Отсюда следует сходимость ряда (5.6) и стремление к нулю его общего члена, так что  $R_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ .  $\Delta$

Таким образом, все числовые коэффициенты ряда Тейлора функции  $f_0$  равны нулю и ряд сходится к нулю для всех  $x \in \mathbb{R}$ , в то время как  $f_0$  обращается в нуль только при  $x = a$ .

Возникает вопрос: когда функция  $f$ , порождающая ряд Тейлора (5) является его суммой? Поскольку частичные суммы  $S_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ряда (5) — суммы многочленов Тейлора функции  $f$ , то сумма ряда  $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x; a, f)$  совпадает с  $f(x)$  для  $x \in (\alpha, \beta)$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - T_n(x; a, f)] = 0$  для  $x \in (\alpha, \beta)$ . Некого-го достаточное условие для этого даёт формула Тейлора.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  бесконечно дифференцируема в ин-тервале  $(\alpha, \beta)$  и  $a \in (\alpha, \beta)$  — фиксированная точка. Если на отрезке  $[a, x]$ ,  $x \in (\alpha, \beta)$ , все производные функции ограничены одним и тем же числом:  $|f^{(n)}(t)| \leq M$ ,  $a \leq t \leq x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то ряд Тейлора (5) функции  $f$  с центром  $x=a$  сходится в точке  $x$  к  $f(x)$ .

Получив условием теоремы и остаточным членом в форме Ла-гранжа (5.4), получим

$$|f(x) - T_n(x; a, f)| = |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Чтобы убедиться в том, что правая часть последнего неравенства стре-мится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , рассмотрим ряд

$$M + M|x-a| + \dots + \frac{M}{n!} |x-a|^n + \dots \quad (5.6)$$

Применяя к нему признак Даламбера, найдем, что для  $x \neq a$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}}{\frac{M}{n!} |x-a|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-a|}{n+1} = 0 < 1.$$

Отсюда следует сходимость ряда (5.6) и стремление к нулю его общего члена, так что  $R_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\Delta$

### 5.3. Ряды Тейлора элементарных функций.

Как и для функции Тейлора, на практике удобно в использовании ряды Тейлора с единым центром  $a=0$ , когда ряд (5.3) принимает вид

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (5.7)$$

1°. Функция  $f(x) = e^x$  бесконечно дифференцируема на всей числовой пря-мой  $(-\infty, +\infty)$  и  $f^{(n)}(x) = e^x$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , так что  $f(0) = f^{(n)}(0) = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Кроме того, для любого фиксированного  $x \in \mathbb{R}$  оценка  $|f^{(n)}(t)| = e^t \leq e^{|x|}$  справедлива для всех  $t$  между 0 и  $x$  и всех  $n \in \mathbb{N}$ . Согласно теореме 1 и формуле (5.7),

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (5.8)$$

2°. Функция  $f(x) = \sin x$  бесконечно дифференцируема на  $(-\infty, +\infty)$  и  $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}n)$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , так что  $f(0) = 0$  и  $f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi}{2}n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\sin \frac{\pi}{2}n = \sin \pi k = 0$ ; если  $n = 2k-1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то

$\sin \frac{\pi}{2} n = \sin \frac{\pi}{2} (2k-1) = \sin (\pi k - \frac{\pi}{2}) = -\cos \pi k = (-1)^{k-1}$ . Так как (17)

$|f^{(n)}(x)| = |\sin(x + \frac{\pi}{2} n)| \leq 1, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , то по теореме 1 и формуле (9)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (9)$$

3°. Функция  $f(x) = \cos x$  бесконечно дифференцируема на  $(-\infty, +\infty)$  и  $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2} n), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , так что  $|f^{(n)}(x)| \leq 1, x \in \mathbb{R}$ , и  $f(0) = 1$ ,  $f^{(n)}(0) = \cos \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{N}$ . Если  $n = 2k$ , то  $\cos \frac{\pi}{2} n = \cos \pi k = (-1)^k, k \in \mathbb{N}$ ; если  $n = 2k-1$ , то  $\cos \frac{\pi}{2} n = \cos(\pi k - \frac{\pi}{2}) = \sin \pi k = 0, k \in \mathbb{N}$ . Поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (10)$$

4°. Функция  $f(x) = \ln(1+x)$  бесконечно дифференцируема при  $x > -1$  и при  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$  для всех  $x > -1$  и всех  $n \in \mathbb{N}$ , так что  $f(0) = \ln 1 = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!, n \in \mathbb{N}$ . Поэтому её разлагает Теилора в ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots, \quad \text{§}$$

применив к данному ряду признак Даламбера абсолютной сходимости ряда, получим  $u_n(x) = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| = \frac{|x|^n}{n}, n \in \mathbb{N}$ , и для всех  $x \neq 0$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|,$$

так что ряд абсолютно сходится для всех  $x, |x| < 1$ , и расходится для всех  $x, |x| > 1$ . Остаточный член  $R_n(x)$  в формуле Тейлора (5.4') функции  $f(x) = \ln(1+x)$  в точках  $x > 0$  имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} = (-1)^n \frac{1}{n+1} \left( \frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

Поэтому  $|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x}{1+\theta x} \right|^{n+1} < \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$ , и  $R_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Согласно теореме 1,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (11)$$

и равенство доказано для всех  $x, 0 \leq x < 1$ . Доказывается, что оно справедливо также для  $-1 < x < 0$ , так что формула (11) справедлива для всех  $x, |x| < 1$ , и ряд в ней абсолютно сходится.

Для  $x=1$  получаем уже известный ряд Лейбница  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ , для  $x=-1$  получаем расходящийся ряд  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

5°. Функция  $f(x) = (1+x)^\alpha$  с любым действительным показателем степени  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  разлагается по формуле бинома  $(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^k$

которую можно считать конечным рядом, у которого сумма остатков  $R_m(x) = 0$  для всех  $m \geq n$ . Если  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \alpha \neq 0$ , то  $f(x) = (1+x)^\alpha$

Бесконечно дифференцируемая для всех  $x > -1$  и  $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$   
 $n \in \mathbb{N}$ , так что  $f(0)=1$ ,  $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $(1+x)^\alpha$  разлагается в  
 ряд Тейлора

$$(12) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

который абсолютно сходится при  $|x| < 1$  и расходится при  $|x| > 1$  (это проверяется посредством признака Даламбера абсолютной сходимости ряда).

Ряд (12) может сходиться при  $x = -1$  и при  $x = 1$ , если  $\alpha > 0$ .

#### 5.4. Свойства символов $O$ и $o$ .

**Определение 1.** Функции  $f$  и  $g$  связаны отношением  $f = O(g)$ ,  $x \rightarrow a$ , если в некоторой проколлотой окрестности  $\dot{U}$  точки  $a$  справедливо представление  $f(x) = b(x)g(x)$ ,  $x \in \dot{U}$ , в которой функция  $b(x)$  ограничена в  $\dot{U}$ .

В частности, запись  $f(x) = O(1)$ ,  $x \rightarrow a$ , обозначает ограниченную функцию  $f$  в некоторой проколлотой окрестности  $\dot{U}$  точки  $a$ .

**Примеры:** 1)  $\sin x = O(1)$ ,  $x \rightarrow 0$ , так как  $|\sin x| \leq 1$  (для всех  $x \in \mathbb{R}$ );  
 2)  $\sin x = O(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ , так как  $|\sin x| \leq |x|$  (для всех  $x \in \mathbb{R}$ ); 3)  $\sin^2 x = O(x)$ ,  
 $x \rightarrow +\infty$ , так как  $\sin^2 x \leq |\sin x|$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

**Определение 2.** Функции  $f$  и  $g$  связаны отношением  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow a$ , если в некоторой проколлотой окрестности  $\dot{U}$  точки  $a$  справедливо представление  $f(x) = \alpha(x)g(x)$ ,  $x \in \dot{U}$ , в котором  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

В частности, запись  $f(x) = o(1)$ ,  $x \rightarrow a$ , обозначает бесконечно малую функцию  $f$  при  $x \rightarrow a$ .

**Примеры:** 1) Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ , то  $\sin x = o(1)$ ,  $x \rightarrow 0$ ; 2) Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , то  $\frac{1}{x} = o(1)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

**Замечание 1.** Так как любая бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$  ограничена в некоторой проколлотой окрестности точки  $x = a$  то из отношения  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow a$ , следует отношение  $f = O(g)$ ,  $x \rightarrow a$  (обратное, вообще говоря, неверно).

**Лемма 2 (о свойствах символа  $O$ ):** 1°. Если  $f_1 = O(f_2)$ ,  $x \rightarrow a$ , и  $f_2 = O(f_3)$ ,  $x \rightarrow a$ , то  $f_1 = O(f_3)$ ,  $x \rightarrow a$  (транзитивность символа  $O$ ); 2°. Если  $f_i = O(h)$ ,  $x \rightarrow a$ ,  $i = 1, 2$ , то  $f_1 + f_2 = O(h)$ ,  $x \rightarrow a$  (теорема сложения); 3°. Если  $f_i = O(g_i)$ ,  $x \rightarrow a$ ,  $i = 1, 2$ , то  $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$ ,  $x \rightarrow a$  (теорема умножения).

1°. Согласно определению 1,  $f_1(x) = b_1(x)f_2(x)$  в некоторой проколлотой окрестности  $\dot{U}_1$  точки  $a$  и  $b_1(x)$  ограничена в  $\dot{U}_1$ , а также  $f_2(x) = b_2(x)f_3(x)$  в некоторой проколлотой окрестности  $\dot{U}_2$  точки  $a$  и  $b_2(x)$  ограничена в  $\dot{U}_2$ . В пересечении  $\dot{U}_1 \cap \dot{U}_2 = \dot{U}$ , являющемся проколлотой окрестностью точки  $a$ , справедливы оба представления, и следовательно,  $f_1(x) = b_1(x)b_2(x)f_3(x)$  для всех  $x \in \dot{U}$ , а функция  $b_1(x)b_2(x)$  ограничена в  $\dot{U}$  (как произведение ограниченных функций). Таким образом,  $f_1 = O(f_3)$ ,  $x \rightarrow a$ .

2°. Согласно определению 1,  $f_1(x) = b_1(x)h(x)$  для всех  $x$  из некоторой проколлотой окрестности  $\dot{U}_1$  точки  $a$ , в которой функция  $b_1(x)$  ограничена, а также  $f_2(x) = b_2(x)h(x)$  для всех  $x$  из некоторой проколлотой окрестности  $\dot{U}_2$  точки  $a$ , в которой функция  $b_2(x)$  ограничена. В проколлотой окрестности  $\dot{U} = \dot{U}_1 \cap \dot{U}_2$  точки  $a$  справедливо представление  $f_1(x) + f_2(x) = [b_1(x) + b_2(x)]h(x)$ ,  $x \in \dot{U}$ , в которой функция  $b_1(x) + b_2(x)$  ограничена в  $\dot{U}$  (как сумма ограниченных функций). Таким образом, по определению 1,  $f_1 + f_2 = O(h)$ ,  $x \rightarrow a$ .

3°. По условию теоремы и свойству 1°, существуют такие прокло-  
ные окрестности  $\tilde{V}_i, i=1,2$ , такие а, что для каждого  $i=1,2$  имеем  
 $f_i(x) = b_i(x)g_i(x), x \in \tilde{V}_i$ , где каждая  $b_i(x), i=1,2$ , - ограниченная функ-  
ция в  $\tilde{V}_i, i=1,2$ . Тогда в проклоной окрестности  $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2$  точки а  
а справедливо представление  $f_1(x)f_2(x) = b_1(x)b_2(x)g_1(x)g_2(x), x \in \tilde{V}$ , в  
котором функция  $b_1(x)b_2(x)$  ограничена в  $\tilde{V}$ . Согласно определению 1,  
 $f_1f_2 = O(g_1g_2), x \rightarrow a$ .  $\rightarrow$

Перепишем утверждение 1°-2° теоремы 2 в символической форме:

1°.  $O(O(f)) = O(f), x \rightarrow a$ ; 2°.  $\sum_{j=1}^m \lambda_j O(f) = O(f), x \rightarrow a$  для любых  $\lambda_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m$ .

3°.  $O(g_1)O(g_2) = O(g_1g_2), x \rightarrow a$ .

Теорема 3 (свойства символа 0): 1°. Если  $f_1 = O(f_2), x \rightarrow a$ , и  $f_2 = O(f_3), x \rightarrow a$ , то  $f_1 = O(f_3), x \rightarrow a$ ; 2°. Если  $f_1 = O(f_2), x \rightarrow a$ , и  $f_2 = O(f_3), x \rightarrow a$ , то  $f_1 = O(f_3), x \rightarrow a$ ; 3°. Если  $f_1 = O(f_2), x \rightarrow a$ , и  $f_2 = O(f_3), x \rightarrow a$ , то  $f_1 = O(f_3), x \rightarrow a$ ; 4°. Если  $f_i = O(h), x \rightarrow a, i=1,2$ , то  $f_1 \pm f_2 = O(h), x \rightarrow a$ ; 5°. Если  $f_1 = O(g_1), x \rightarrow a$ , и  $f_2 = O(g_2), x \rightarrow a$ , то  $f_1f_2 = O(g_1g_2), x \rightarrow a$ ; 6°. Если  $f_i = O(g_i), x \rightarrow a, i=1,2$ , то  $f_1f_2 = O(g_1g_2), x \rightarrow a$  (теорема умножения).

Отметим прежде всего, что 3° есть следствие из 1°, и 2°, а 6° есть следствие 5° в силу замечания 1 к определению 3.

Кроме того, доказательство теоремы 3 совершенно аналогично доказательству теоремы 2: нужно только в доказательстве теоремы 2 заменить ограниченные функции на бесконечно малые и воспользоваться свойствами бесконечно малых функций.

В качестве примера приведем доказательство утверждения 1° теоремы 3. По условию и определению 2, в некоторой проклоной окрестности  $\tilde{V}_1$  точки а справедливо представление  $f_1(x) = b_1(x)f_2(x), x \in \tilde{V}_1$ , где  $b_1(x)$  - ограниченная функция в  $\tilde{V}_1$ , а по определению 3, в неко-  
торой проклоной окрестности  $\tilde{V}_2$  точки а имеем  $f_2(x) = \alpha_1(x)f_3(x), x \in \tilde{V}_2$ , где  $\alpha_1(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ . Тогда в прокло-  
ной окрестности  $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2$  точки а имеем  $f_1(x) = \alpha_1(x)b_1(x)f_3(x), x \in \tilde{V}$ , и функция  $\alpha_1(x)b_1(x)$  - бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  (как произведение бесконечно малой и ограниченной функций). Согласно определению 3,  $f_1 = O(f_3), x \rightarrow a$ .

Доказательство остальных утверждений теоремы 3 представ-  
ляет читателю.  $\rightarrow$

Перепишем утверждение теоремы 3 в символической форме:

1°.  $O(O(f)) = O(f), x \rightarrow a$ ; 2°.  $O(O(f)) = O(f), x \rightarrow a$ ; 3°.  $O(O(f)) = O(f), x \rightarrow a$ ; 4°.  $\sum_{j=1}^m \lambda_j O(f) = O(f), x \rightarrow a$ ; для любых  $\lambda_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m$ ; 5°.  $O(f)O(g) = O(fg), x \rightarrow a$ ; 6°.  $O(f)O(g) = O(fg), x \rightarrow a$ .

Примеры: 1°. Мы знаем, что функция  $f$ , имеющая предел при  $x \rightarrow a$ , ограничена в некоторой проклоной окрестности точки а и поэтому  $f = O(1), x \rightarrow a$ ; 2°. Так как функция  $g(x) = x$  - бесконечно малая при  $x \rightarrow 0$

то  $x = o(1), x \rightarrow 0$ , и следовательно,  $x^{n+1} = x^n \cdot x = x^n o(1) = o(x^n), x \rightarrow 0$ , для любого натурального  $n \in \mathbb{N}$ ; 3°. Если функция  $f$  имеет предел при  $x \rightarrow 0$ , то  $f(x)x^{n+1} = O(1) \cdot o(x^n) = o(x^n), x \rightarrow 0$ , для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

5.5. Локальная формула Тейлора.

Для функции  $f$ , имеющей непрерывную производную  $f^{(n+1)}$  в интервале  $(\alpha, \beta)$ , содержащем точку  $0$ , т.е.,  $0 \in (\alpha, \beta)$ , рассмотрим формулу Тейлора (5.2') с остаточным членом  $R_n(x)$  в форме ЛAGRANGE (5.4'); т.е.,  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, x \in (\alpha, \beta), 0 < \theta < 1$ . Так как существует  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(\theta x) = f^{(n+1)}(0)$ , то, на основании примера 3° из предыдущего пункта 5.4, заключаем, что  $R_n(x) = o(x^n), x \rightarrow 0$ . Поэтому формула (5.2') принимает вид

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), x \rightarrow 0, \quad (13)$$

Локальная формула Тейлора.

Опираясь на формулу (13) и представления (8) - (12), получаем локальные формулы Тейлора элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \rightarrow 0;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), x \rightarrow 0;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n), x \rightarrow 0;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), x \rightarrow 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \alpha \neq 0.$$

Пример. Подставим задану вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ . Обозначая предел символом  $l$  и представляя  $\sin x$  по формуле Тейлора, получим

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3} - x}{x^3} =$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3} - \frac{x}{3}}{(\frac{x}{3})^3 \cdot 27} - 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{3}}{(\frac{x}{3})^3 \cdot 27} = \frac{3}{27} l - \frac{4}{27} = \frac{1}{9} l - \frac{4}{27},$$

откуда  $\frac{8}{9} l = -\frac{4}{27}$  и  $l = -\frac{1}{6}$ .

Однако, приведённые выше рассуждения нельзя считать математическим доказательством, поскольку мы не установили самого факта существования предела, и следовательно, не имели права приписывать символ (число)  $l$  для его обозначения.

Математическое доказательство состоит в следующем: разложим  $\sin x$  по локальной формуле Тейлора:  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0$ , и подставим это разложение под знак предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{3!} + o(x) \right) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

(Разложение по локальной формуле Тейлора ведётся до слагаемого с такой степенной переменной  $x$ , которую она имеет в знаменателе; в данном случае — до слагаемого при  $x^3$ ).

В заключение заметим, что как и формулы Лагранжа о конечных приращениях, формулы Тейлора (5.2') с остаточным членом в форме Лагранжа (5.4') также придают локальную форму.

Пусть функция  $f$  определена в окрестности  $U(x) = (\alpha, \beta)$  точки  $x \in (\alpha, \beta)$  и имеет в  $(\alpha, \beta)$  непрерывные производные функции до порядка  $n+1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , включительно. Тогда, согласно формуле (5.2) и (5.4),

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h) \quad (14)$$

для любого  $h$ ,  $x+h \in (\alpha, \beta)$ , и некоторого  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Вспомогая, что  $f^{(k)}(x) h^k = d^k f(x)(h)$ ,  $1 \leq k \leq n+1$ , и  $\Delta f(x)(h) = f(x+h) - f(x)$ , перепишем (14) в форме дифференциалов

$$\Delta f(x) = \frac{d f(x)}{1!} + \dots + \frac{d^n f(x)}{n!} + \left[ \frac{d^{n+1} f(x)}{(n+1)!} \right]_{x+\theta dx} \cdot (15)$$

Именно в записи (15) формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа переносится на функции нескольких действительных переменных, изложение которых мы начинаем в следующей главе.

# Раздел V. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

## Глава 1. Непрерывные функции и отображения от нескольких действительных переменных.

### §1. $m$ -мерное евклидово пространство

Анализ одномерного анализа существенно поле  $\mathbb{R}$  действительных чисел. Многомерный анализ, к изучению которого мы теперь переходим, имеет своим полем действия евклидово пространство произвольной конечной размерности. В этом параграфе будет введено понятие  $m$ -мерного евклидова пространства вместе с понятиями скалярного произведения, длины и меры, на которых оно строится.

#### 1.1. Векторное пространство $\mathbb{R}^m$ .

Символом  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , обозначают множество всевозможных упорядоченных  $m$ -наборов действительных чисел. Его элементы  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  принято называть точками, а числа  $x_1, x_2, \dots, x_m$  соответственно первой, второй, ...,  $m$ -ой координатами точки  $(x_1, \dots, x_m)$ . Точки будут часто обозначаться одной буквой: в аналитических рассуждениях строчной -  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ; в геометрических - прописной, скажем,  $M$ , или с указанием координат  $M(x_1, \dots, x_m)$ . При  $m=1, 2, 3$  и иногда 4 нумерация не применяется: для  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  обычна запись одной точки одной буквой; для  $\mathbb{R}^2$  - запись вида  $(x, y)$ , для  $\mathbb{R}^3$  - вида  $(x, y, z)$ ; для  $\mathbb{R}^4$  (иногда) - вида  $(x, y, z, t)$ . Символ  $\mathbb{R}^2$  будет отождествляться с координатной плоскостью,  $\mathbb{R}^3$  - с координатным пространством.

Но  $\mathbb{R}^m$  есть не только множество: оно наделяется некоторыми стандартно определенными математическими структурами. Прежде всего на  $\mathbb{R}^m$  вводится операция покомпонентного сложения и умножения на действительные числа (скалярн.): по определению полагают

$$(x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m),$$

$$\lambda (x_1, \dots, x_m) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Это превращает  $\mathbb{R}^m$  в векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$  (действительное векторное пространство). Нулем его служит точка  $O = (0, \dots, 0)$ . При  $m=2$  и  $m=3$  эти операции соответствуют сложению радиусов-векторов соответствующих точек плоскости или пространства и умножению их на действительные числа. Поэтому элементы множеств  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  можно отождествлять также с векторами (отсюда и появилось название "векторное пространство"). Будущие элементы пространства  $\mathbb{R}^m$  будут называться то точками, то векторами, смотря по тому, что в данном контексте удобнее.

В векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$  имеется стандартный базис образованный векторами

$$e^1 = (1, 0, \dots, 0), e^2 = (0, 1, \dots, 0) \dots e^m = (0, 0, \dots, 1);$$

их общая запись:  $e^k = (\delta_1^k, \delta_2^k, \dots, \delta_n^k)$ , где  $\delta_i^k$  - символ Кронекера; и.е.,

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases}.$$

Рейсивно,  $(x_1, \dots, x_m) = x_1 e^1 + \dots + x_m e^m$  и это представление точки  $(x_1, \dots, x_m)$  в виде линейной комбинации векторов  $e^1, \dots, e^m$  единственно. Таким образом,  $\mathbb{R}^m$  есть  $m$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

## 1.2. Скалярное произведение.

Формула

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (1.1)$$

определяет ~~стандартное~~ стандартное скалярное произведение  $\langle x, y \rangle$  векторов  $x = (x_1, \dots, x_m)$  и  $y = (y_1, \dots, y_m)$  в  $\mathbb{R}^m$  для любого  $m \in \mathbb{N}$ , которое удовлетворяет следующим условиям (аксиомам скалярного произведения): 1)  $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ ; 2)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; 3)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ; 4) если  $x \neq 0$ , то  $\langle x, x \rangle > 0$ .

Свойства 1) - 3) непосредственно следуют из вида формулы (1.1) и линейного свойства конечных сумм. Если  $x \neq 0$ , то в упорядоченном наборе  $x = (x_1, \dots, x_m)$  найдётся координата  $x_i \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ , и следовательно,  $\langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_m^2 \geq x_i^2 > 0$ . Таким образом,  $\langle x, y \rangle$  - билинейная функция.

Беря во втором условии  $\lambda = 0$ , получаем  $\langle 0, y \rangle = 0$  для всех  $y \in \mathbb{R}^m$ , а значит, в силу третьего условия, также  $\langle y, 0 \rangle = 0$  для всех  $y \in \mathbb{R}^m$ . В частности,  $\langle 0, 0 \rangle = 0$ . Таким образом, четвёртое условие означает, что  $\langle x, x \rangle \geq 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}^m$ , причём  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

При  $m=1$  формула (1.1) задаёт обычное произведение  $\langle x, y \rangle = xy$  чисел  $x, y \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ . При  $m=2$  и  $m=3$  скалярное произведение определяется геометрически. В общем случае  $m \in \mathbb{N}$  формула (1.1) принимается за определение стандартного скалярного произведения в  $\mathbb{R}^m$ . Отметим, что в  $\mathbb{R}^m$  имеется бесконечное множество других скалярных произведений: например, определённых (заданных) формулой  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k \cdot \beta_k$  с произвольными фиксированными положительными коэффициентами  $\beta_k$ .

## 1.3. Неравенство Коши - Бунжевского.

Теорема 1. Скалярное произведение  $\langle x, y \rangle$  удовлетворяет неравенству

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle. \quad (1.2)$$

4 В силу аксиом скалярного произведения для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  имеем

$$\langle \lambda x - y, \lambda x - y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0. \quad (1.3)$$

Если  $\langle x, x \rangle \neq 0$ , то при  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$  это даёт

$$-\frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle x, x \rangle} + \langle y, y \rangle \geq 0,$$

откуда и следует (1.2). Если же  $\langle x, x \rangle = 0$ , то  $x = 0$  и  $\langle x, y \rangle = 0$ , так что (1.2) справедливо со знаком равенства.  $\triangleright$

Замечание 1. Знак равенства в (1.2) имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

4 Пусть они линейно зависимы. Если  $x = 0$ , то равенство (1.2) установлено выше. Если  $x \neq 0$  и, по четвёртому условию,  $\langle x, x \rangle \neq 0$ , то  $y = \lambda x$ , так что  $\langle x, y \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$ , откуда  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$  и

$$\langle y, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle x, x \rangle},$$

т.е.,  $\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ . Обратно, пусть справедливо последнее равенство. Если  $x \neq 0$ , т.е.,  $\langle x, x \rangle \neq 0$ , то в (1.3) при  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$  имеет место равенство; т.е.,  $\langle \lambda x - y, \lambda x - y \rangle = 0$  или, что то же,  $y = \lambda x$ . Линейная зависимость  $x$  и  $y$  при  $x = 0$  очевидна.  $\triangleright$

Сочетание (1.2) называют неравенством Коши-Буняковского. В координатной записи оно имеет вид

$$\left( \sum_{i=1}^m x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^m y_i^2. \quad (1.4)$$

#### 1.4. Метрика в $\mathbb{R}^m$ .

Для произвольных  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  имеем  $x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_m - y_m)$  и  $\langle x - y, x - y \rangle = \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2$ . Функция  $d_m(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$  удовлетворяет условиям: 1)  $d_m(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ , и 2)  $d_m(x, y) \leq d_m(x, z) + d_m(y, z)$  для любого  $z \in \mathbb{R}^m$ .

Справедливость первого условия очевидна. Условие 2) имеет вид

$$\begin{aligned} d_m(x, y) &= \left( \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^m [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^m [1 \cdot |x_i - z_i| + 1 \cdot |y_i - z_i|]^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^m (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^m (y_i - z_i)^2 \right)^{1/2} = \\ &= d_m(x, z) + d_m(y, z); \end{aligned}$$

т.е., вид доказанного ранее неравенства Мinkовского при  $p=2$ , так что условие 2) также справедливо.

Функцию  $d_m(x, y), x, y \in \mathbb{R}^m$  называют расстоянием между  $x$  и  $y$  в  $\mathbb{R}^m$  (или метрикой в векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$ ). В случае  $m=1$ ,  $d_1(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$ ; в случае  $m=2, 3$ ,  $d_m(x, y)$  определяет длину вектора  $x - y$ .

Так как метрика  $d_m(x, y), x, y \in \mathbb{R}^m$ , порождается стандартным скалярным произведением в  $\mathbb{R}^m$  её называют стандартной (или евклидовой) метрикой в  $\mathbb{R}^m$ .

Определение 1. Пространство  $\mathbb{R}^m$ , наделённое стандартным скалярным произведением и евклидовой метрикой называют m-мерным евклидовым пространством.

Число  $d_m(x, 0) = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$  называют длиной (или нормой) вектора  $x \in \mathbb{R}^m$  и обозначают  $\|x\|_m = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$ . Отметим, что  $\|x\|_m = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , где  $\langle x, x \rangle$  - стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^m$ .

### 1.5. Угол. Ортогональность.

Наличие стандартного скалярного произведения позволяет ввести не только расстояние, но и углы. Рассмотрим произвольные  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  и  $x \neq 0, y \neq 0$ , так что  $\|x\|_m \neq 0, \|y\|_m \neq 0$ . В силу неравенства Коши-Бунжековского,  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_m \|y\|_m$ , откуда  $\left| \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_m \|y\|_m} \right| \leq 1$ . Но всякое число, модуль которого не превосходит 1, есть косинус однозначно определенного угла  $\varphi \in [0, \pi]$ . Таким образом  $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_m \|y\|_m} = \cos \varphi$ . Вектору  $\varphi$  называют углом между векторами  $x, y \in \mathbb{R}^m$ ; при этом,  $\langle x, y \rangle = \|x\|_m \|y\|_m \cos \varphi$ ; т.е., скалярное произведение двух векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними (как в векторной алгебре на плоскости и в пространстве, но там это утверждение есть определение скалярного произведения, а здесь оно - следствие неравенства Коши-Бунжековского).

Определение 2. Векторы  $x$  и  $y$  называют ортогональными если их ~~скалярное~~ скалярное произведение  $\langle x, y \rangle$  равно нулю. Если  $x$  и  $y$  - ненулевые векторы в  $\mathbb{R}^m$ , то их ортогональность означает, что угол между этими векторами прямой (отсюда и термин "ортогональность"). Нулевой вектор ортогонален всякому.

## §2. Множества в метрических пространствах.

### 2.1. Метрические пространства.

Определение 1. Метрикой (или расстоянием) на непустом множестве  $X$ , называют функцию, относить к каждой упорядоченной паре  $(x, y)$  элементов из  $X$  такое действительное число (будем обозначать его  $d(x, y)$ ) и называть расстоянием от  $x$  до  $y$ , что выполнены следующие условия (аксиомы метрики):  
1)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$  для всех  $x, y, z \in X$ ; 2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

Положив  $z=x$  в неравенстве аксиомы 1 и приняв во внимание аксиому 2, получаем  $d(x,y) \leq d(x,x) + d(y,x) = d(y,x)$ ; на том же основании  $d(y,x) \leq d(x,y)$ , и следовательно,  $d(x,y) = d(y,x)$  для всех  $x,y \in X$  (расстояние от  $x$  до  $y$  равно расстоянию от  $y$  до  $x$ ). С другой стороны, положив  $y=x$  в неравенстве аксиомы 1 и приняв во внимание аксиому 2, получим  $0 \leq d(x,x) \leq 2d(x,z)$ , откуда  $d(x,z) \geq 0$  для всех  $x,y \in X$ . Неравенство аксиомы 1 или, что то же, неравенство

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad (2.1)$$

называют неравенством треугольника ("длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон").

Определение 2. Метрическим пространством называют непустое множество  $X$ , наделённое метрикой  $d$ . Обозначение:  $(X; d)$ .

Для  $m$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^m$ , наделённого стандартной метрикой  $d_m$ , вместо  $(\mathbb{R}^m; d_m)$  будем использовать символ  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  (как и для множества  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ ). На множестве  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , можно определить бесконечное множество метрик, среди которых отметим только одну: для произвольных точек  $x=(x_1, \dots, x_m), y=(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  положим  $d^1_m(x,y) = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i|$ . Функция  $d^1_m(x,y)$  удовлетворяет аксиомам 1 и 2 метрики, поскольку модуль числа удовлетворяет неравенству треугольника. Из определения непосредственно следует неравенство

$$d^1_m(x,y) \leq d_m(x,y) \leq \sqrt{m} d^1_m(x,y), \quad x,y \in \mathbb{R}^m, \quad (2.2)$$

указывающее на свойство эквивалентности метрик  $d^1_m$  и  $d_m$  в  $\mathbb{R}^m$ .

### 2.2. Открытые шары; $\delta$ -окрестности.

Определение 3. Пусть  $X$  - метрическое пространство с метрикой  $d$  и число  $r > 0$ . Открытый шар в  $X$  с центром  $a \in X$  и радиусом  $r > 0$  называют множеством  $U(a;r) = \{x \in X; d(x,a) < r\}$ . Отметим, что  $a \in U(a;r)$  (ибо  $d(a,a) = 0 < r$ ), и что если  $0 < r_1 < r_2$ , то  $U(a;r_1) \subset U(a;r_2)$  (ибо  $d(x,a) < r_1$  влечёт  $d(x,a) < r_2$ ).

В  $\mathbb{R}^m$ , наделённом стандартной метрикой  $d_m$ ,

$$U(a;r) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; \sum_{i=1}^m (x_i - a_i)^2 < r^2\}, \quad a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m.$$

В частности,  $U(a;r)$  при  $m=1$  есть интервал  $(a-r, a+r)$ ;  $U(a,b;r)$  при  $m=2$  - открытый круг  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$ , и наконец,

$V((a,b,c);2)$  при  $m=3$  — открытый шар  
 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < 2^2\}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

(отсюда и общее название — «шар»).

Определение 4.  $\delta$ -окрестностью точки  $a$  метрического пространства  $(X; d)$  называют открытый шар  $V(a; \delta), \delta > 0$ .

В частности, в  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$   $\delta$ -окрестность  $V(a; \delta)$  числа  $a \in \mathbb{R}$  есть, как прежде, интервал  $(a-\delta, a+\delta)$ .

### 2.2. Общее понятие окрестности в метрическом пространстве.

Уже в случае плоскости целесообразно расширить понятие окрестности точки.

Определение 5. Окрестностью точки метрического пространства  $(X; d)$  будем называть любое множество в  $X$ , содержащее какую-нибудь  $\delta$ -окрестность этой точки.

Таким образом,  $V$  есть окрестность точки  $a \in X$  тогда и только тогда, когда  $V \subset X$  и существует такое  $\delta > 0$ , что  $V \supset V(a; \delta)$ ; и.е.,  $V$  содержит открытый шар с центром  $a$  радиуса  $\delta$ . В частности, любая  $\delta$ -окрестность точки  $a$  есть её окрестность и в смысле определения 5 (ибо содержит, например, саму себя). Но окрестностью точки  $a \in X$  служат, например, также замкнутый шар.

$$B(a; r) = \{x \in X; d(x, a) \leq r\}, r > 0.$$

с центром  $a$  и радиусом  $r > 0$ , так как он содержит  $V(a; r)$ .

В  $\mathbb{R}^m$  наряду с шаровыми употребительны также кубические окрестности.

Определение 6. Открытым кубом в  $\mathbb{R}^m$  с центром  $a$  и стороной  $2h$  (где  $h > 0$ ) называют множество

$$Q(a; h) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; |x_i - a_i| < h, 1 \leq i \leq m\}, a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$$

в других обозначениях,  $Q(a; h) = \{x \in \mathbb{R}^m; d_m^1(x, a) < h\}$ . При  $m=1$  это интервал  $(a-h, a+h)$ . При  $m=2$  множество  $Q((a,b); h)$  — квадрат  $\{x, y \in \mathbb{R}^2; a-h < x < a+h, b-h < y < b+h\}$ . При  $m=3$  множество  $Q((a,b,c); h)$  — куб

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; a-h < x < a+h, b-h < y < b+h, c-h < z < c+h\}$$

(отсюда и общее название — «куб»).

Каждый куб  $Q(a; \delta)$  в  $\mathbb{R}^m$  есть окрестность точки  $a \in \mathbb{R}^m$ , ибо  $Q(a; \delta) \supset V(a; \delta)$ .

$$\Delta \text{ так как } |x_k - a_k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - a_i)^2} = d_m(x, a), 1 \leq k \leq m.$$

то  $d_m(x, a) < \delta$  влечёт  $|x_k - a_k| < \delta$  для всех  $k, 1 \leq k \leq m$ ; и.е., свойство  $x \in U(a; \delta)$  влечёт  $x \in Q(a; \delta)$ .  $\Delta$

Теорема 1. Любой открытый шар  $U(a; \delta)$  в метрическом пространстве  $(X; d)$  есть окрестность каждой своей точки.

$\Delta$  Пусть  $x \in U(a; \delta)$ ,  $\delta > 0$ ; и.е.,  $d(x, a) < \delta$ , так что  $\delta = \delta - d(x, a) > 0$ . Если  $y \in U(x; \delta)$ , и.е.,  $d(y, x) < \delta$ , то  $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta + d(x, a) = \delta$  и  $y \in U(a; \delta)$ . Таким образом,  $U(x; \delta) \subset U(a; \delta)$ , так что  $U(a; \delta)$  (по определению 5) - окрестность любой своей точки  $x$ .  $\Delta$

## 2.4. Свойства окрестностей.

Теорема 2. Окрестности точек в метрическом пространстве  $(X; d)$  обладают свойствами: 1) любая окрестность точки образует окрестность этой точки; 2) пересечение любых двух окрестностей точки образует окрестность этой точки; 3) точка входит во всякую свою окрестность; 4) любая окрестность точки содержит такую окрестность этой точки, которая является окрестностью каждой своей точки; 5) (свойство отделимости) для произвольных различных точек  $a, b \in X$  можно указать такое число  $\delta > 0$ , что открытые шары  $U(a; \delta)$  и  $U(b; \delta)$  не пересекаются; и.е.,  $U(a; \delta) \cap U(b; \delta) = \emptyset$ .

$\Delta$  Рассмотрим произвольную точку  $a \in X$  и обозначим символом  $\mathcal{U}(a)$  систему всех окрестностей точки  $a$  в пространстве  $(X; d)$ .

1) Если  $U \in \mathcal{U}(a)$  и  $U \subset V \subset X$ , то по определению 5 окрестности, существует  $\delta$ -окрестность  $U(a; \delta) \subset U$  и  $U(a; \delta) \subset V$ , так что опять по этому определению,  $V$  - окрестность точки  $a$ .

2) Если  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(a)$ , то, по определению 5, существуют  $U(a; \delta_1) \subset U_1$ ,  $i=1, 2$ , и  $\delta_i > 0$ . Положим  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ,  $\delta > 0$ , тогда, что  $U(a; \delta) \subset U_1$  и  $U(a; \delta) \subset U_2$ , и поэтому

$$U(a; \delta) \subset U(a; \delta_1) \cap U(a; \delta_2) \subset U_1 \cap U_2,$$

так что  $U_1 \cap U_2$  - окрестность точки  $a$ .

3) Для любой  $U \in \mathcal{U}(a)$ , согласно определению 5 окрестности, существует открытый шар  $U(a; \delta) \subset U$ ,  $\delta > 0$ . Тогда  $a \in U(a; \delta)$  и  $a \in U$ .

4) Для любой  $U \in \mathcal{U}(a)$  существует открытый шар  $U(a; \delta) \subset U$ ,  $\delta > 0$ , и, по теореме 1,  $U(a; \delta)$  есть окрестность каждой своей точки.

5) По условию  $d(a,b) > 0$  (так как  $a \neq b$ ). Если взять  $\delta = \frac{1}{2}d(a,b) > 0$  и предположить, что открытые шары  $U(a;\delta)$  и  $U(b;\delta)$  пересекаются, то для точки  $x \in U(a;\delta) \cap U(b;\delta)$  имеем  $d(x,a) < \delta$  и  $d(x,b) < \delta$ , откуда  $d(a,b) \leq d(x,a) + d(x,b) < \delta + \delta = d(a,b)$ . Полученное противоречие показывает, что  $U(a;\delta) \cap U(b;\delta) = \emptyset$ .  $\triangleright$

### 2.5. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.

Определение 7. Множество  $G \subset X$  называют открытым в пространстве  $(X;d)$ , если каждая точка множества  $G$  входит в него вместе с некоторой своей  $\delta$ -окрестностью; и.е., если множество  $G$  есть окрестность каждой своей точки.

Точку произвольного множества  $E \subset X$  называют его внутренней точкой, если она входит в  $E$  вместе с некоторой своей  $\delta$ -окрестностью. Таким образом, открытое множество в  $(X;d)$  — множество, состоящее только из своих внутренних точек.

Примеры: Согласно утверждению 1 пункта 2.3, любой открытый шар  $U(a;r)$ ,  $a \in X, r > 0$ , — открытое множество в  $(X;d)$ ; 2) покажем, что для любой  $a \in X$  и любого  $r > 0$  множество  $G(a;r) = \{x \in X; d(x,a) > r\}$  — открытое.

$\Delta$  Рассмотрим произвольную точку  $x \in G(a;r)$ , так что  $d(x,a) > r$ , положим  $\delta = d(x,a) - r > 0$  и покажем, что  $U(x;\delta) \subset G(a;r)$ . Для любой  $y \in U(x;\delta)$  имеем  $d(y,x) < \delta$  и  $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) < \delta + d(y,a)$ , откуда  $d(y,a) > d(x,a) - \delta = r$ , так что  $y \in G(a;r)$  и  $U(x;\delta) \subset G(a;r)$ .  $\triangleright$

Теорема 3 (свойства открытых множеств). Открытые множества метрического пространства  $(X;d)$  обладают свойствами: 1) объединение любого непустого семейства открытых множеств есть открытое множество; 2) пересечение произвольной пары (и следовательно, произвольного конечного множества) открытых множеств образует открытое множество; 3) пустое множество — открытое; 4) всё  $X$  — открытое.

$\Delta$  1) Рассмотрим произвольное непустое семейство  $A$  открытых множеств  $G_\alpha, \alpha \in A$ , и пусть  $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ . Для любой точки  $x \in G$  найдётся  $G_\alpha$ , что  $x \in G_\alpha$  и  $G_\alpha$  — окрестность точки  $x$  в силу определения 7. Так как  $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \supset G_\alpha$  и  $x \in G_\alpha$ , то  $G$  — окрестность точки  $x$  в  $(X;d)$  (теорема 2.4), так что  $G$  — окрестность каждой своей точки и  $G$  — открытое множество по определению 7).

2) Пусть  $G_i \subset X, i=1,2$ , — открытые множества и  $G = G_1 \cap G_2$ .

Для произвольной  $x \in G$  справедливо  $x \in G_i, i=1,2$ , и множества  $G_i$  - окрестности точки  $x$  в  $(X; d)$  по определению 7. Согласно свойствам окрестностей (теорема 2, пункт 2), множество  $G = G_1 \cap G_2$  также есть окрестность точки  $x$ ; ит.е.,  $G$  - окрестность любой своей точки и открытое множество по определению 7.

3) Пустое множество  $\emptyset \subset X$  не содержит элементов, и поэтому формально удовлетворяет определению 7.

4) Для произвольной  $x \in X$  и произвольного  $\delta > 0$  открыт шар  $U(x; \delta) \subset X$  и  $x \in U(x; \delta)$ , так что  $X$  - окрестность каждой своей точки, ит.е.,  $X$  - открытое множество.  $\Delta$

Определение 8. Множество  $F \subset X$  называют замкнутым множеством в метрическом пространстве  $(X; d)$ , если его дополнение  $X \setminus F = G$  - открытое множество в  $(X; d)$ .

Примеры: 1) любой замкнутый шар  $B(a; r), a \in X, r > 0$ , - замкнутое множество в  $(X; d)$ , поскольку его дополнение  $X \setminus B(a; r) = G(a; r)$  - открытое множество; 2) множество  $F(a; r) = \{x \in X; d(x, a) \geq r\}, r > 0$ , замкнуто в  $(X; d)$  для любых  $a \in X$  и  $r > 0$ , так как  $X \setminus F(a; r) = U(a; r)$  - открытое множество.

Теорема 4 (свойства замкнутых множеств). Замкнутые множества в метрическом пространстве  $(X; d)$  обладают свойствами: 1) пересечение произвольного непустого семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество; 2) объединение произвольной пары (а следовательно, и произвольного конечного семейства) замкнутых множеств есть замкнутое множество; 3) пустое множество - замкнуто; 4) всё  $X$  - замкнутое множество.

4.1) Рассмотрим произвольное непустое семейство  $\{F_\alpha\}, \alpha \in A$ , замкнутых множеств  $F_\alpha$  в  $(X; d)$ , так что, по определению 8, все множества  $G_\alpha = X \setminus F_\alpha, \alpha \in A$ , - открытые. Поскольку  $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$  и  $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  - открытое множество (по теореме 3, пункт 1),

1), то множество  $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$  - замкнутое, в силу определения 8.

2) Для произвольных замкнутых множеств  $F_1$  и  $F_2$  в  $(X; d)$  множества  $G_i = X \setminus F_i, i=1,2$ , - открытые в силу определения 8, и  $G = G_1 \cap G_2$  - открытое множество по теореме 3, пункт 2). Тогда  $X \setminus G = X \setminus (G_1 \cap G_2) = (X \setminus G_1) \cup (X \setminus G_2) = F_1 \cup F_2$  замкнуто в  $(X; d)$  по определению 8.

3) Так как  $X$  - открытое множество (теорема 3, пункт 4), и  $\emptyset = X \setminus X$ , то  $\emptyset$  - замкнутое множество (по определению 8).

4) Так как  $\emptyset$  - открытое множество (теорема 3, пункт 3) и  $X = X \setminus \emptyset$ , то  $X$  - замкнутое множество (по определению 8).  $\Delta$

Пример. Множество  $S(a; z) = \{x \in X; d(x, a) = z\}$  называют сферой с центром в точке  $a \in X$  и радиусом  $z > 0$ . Так как  $X \setminus S(a; z) = U(a; z) \cup G(a; z)$  и множество  $U(a; z) \cup G(a; z)$  — открытое (как объединение открытых множеств), то  $S(a; z)$  — замкнутое множество в  $(X; d)$ , по определению 8.

### § 3. Непрерывность и предел отображения.

#### 3.1. Непрерывность отображения

Пусть  $X$  и  $Y$  — метрические пространства,  $d_X, d_Y$  — функции расстояния в них.

Определение 1 (Коши). Отображение  $f$  из  $X$  в  $Y$  называется непрерывным в точке  $x_0 \in X$ , если  $x_0 \in Df$  и для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$ , что в каждой точке  $x \in Df$ , удовлетворяющей неравенству  $d_X(x, x_0) < \delta$  справедливо неравенство  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

Это определение является простым обобщением определения непрерывности числовой функции в точке (когда  $X = Y = \mathbb{R}$ ), поскольку при  $X = Y = \mathbb{R}$  имеем  $d_X(x, x_0) = |x - x_0|$  и  $d_Y(f(x), f(x_0)) = |f(x) - f(x_0)|$ .

Рассмотрим конкретные метрические пространства. Если  $X = \mathbb{R}^m, m \geq 1$ , и  $Y = \mathbb{R}$ , то отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$  называют (действительной) функцией  $m$  действительных переменных; значение функции  $f$  в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in Df$  обозначают  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ , а числа  $x_1, x_2, \dots, x_m$  называют аргументами функции  $f$ ;  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  — функция от  $m$  действительных аргументов.

Непрерывность функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  в точке  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$  означает, что  $x_0 \in Df$  и для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что  $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_1, \dots, x_m) - f(x_{10}, \dots, x_{m0})| < \varepsilon$  для всех  $x = (x_1, \dots, x_m) \in Df$ , у которых  $d_m(x, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_{i0})^2} < \delta$ . Это свойство называют также непрерывностью в точке функции нескольких переменных по совкупности аргументов.

Если  $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^n, n \geq 1$ , то отображение  $f$  из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}^n$  называют векторной функцией (вектор-функцией). Векторная область определения векторной функции  $f$  содержит некоторое числовое множество  $E = Df \subset \mathbb{R}$ , а сама она задается посредством набора  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), t \in Df \subset \mathbb{R}$ , числовых функций  $f_j(t), t \in D_j \subset \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n$ , и  $Df_j = Df = E$  для всех  $j, 1 \leq j \leq n$ .

Непрерывность векторной функции  $f(t)$  в точке  $t_0 \in \mathbb{R}$  означает, что  $t_0 \in D_f \subset \mathbb{R}$  и для любого числа  $\varepsilon > 0$  существуют такое число  $\delta > 0$ , что  $d_n(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$  для всех  $t \in D_f \subset \mathbb{R}$ , у которых  $|t - t_0| < \delta$ ; здесь  $d_n(f(t), f(t_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (f_j(t) - f_j(t_0))^2}$ . (1.1)

Если  $X = \mathbb{R}^m, m \geq 1$ , и  $Y = \mathbb{R}^n, n \geq 1$ , то отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  задаётся набором  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  функций  $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , от  $m$  переменных каждая. В этом случае в определении непрерывности отображения  $f$  имеем

$$d_X(x, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_{i0})^2}, \quad d_Y(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^n [f_j(x) - f_j(x_0)]^2}.$$

Лемма 1. Отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  непрерывно в точке  $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{m0}) \in D_f$  тогда и только тогда, когда каждая его компонента  $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , непрерывна в  $x_0$  (как функции от  $m$  переменных).

◁ Прежде всего отметим, что для произвольной  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f = D_{f_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , справедливы неравенства

$$\max_{1 \leq j \leq n} |f_j(x) - f_j(x_0)| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n [f_j(x) - f_j(x_0)]^2} = d_n(f(x), f(x_0)) \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(x) - f_j(x_0)|. \quad (3.1)$$

Если  $f$  непрерывно в  $x_0$ , то  $x_0 \in D_f = D_{f_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , и для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для  $x \in D_f = D_{f_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , и  $d_m(x, x_0) < \delta$  имеем  $d_n(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ . Поэтому, на основании левого неравенства в (3.1),

$|f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon$  для любого  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , и любого  $x \in D_{f_j} = D_f$ , у которого  $d_m(x, x_0) < \delta$ ; так что каждая функция  $f_j(x)$  непрерывна в  $x_0$ .

Если, наоборот, каждая функция  $f_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , непрерывна в точке  $x_0 \in D_{f_j} = D_f$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta_j > 0$ , что  $|f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$  для всех  $x \in D_{f_j} = D_f$ , у которых  $d_m(x, x_0) < \delta_j$ . (3.2)

Положим  $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$ ,  $\delta > 0$ , заключаем, что неравенства в (3.2) справедливы для всех  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , одновременно в точках  $x \in D_f$ , у которых  $d_m(x, x_0) < \delta$ . Поэтому, на основании правого неравенства в (3.1), имеем  $d_n(f(x), f(x_0)) < \sqrt{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon$  для всех  $x \in D_f$ , у которых  $d_m(x, x_0) < \delta$ , так что отображение  $f(x)$  непрерывно в точке  $x_0$ . ▷

Следствие. Вектор-функция непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывна каждая её компонента — числовая функция.

### 3.2. Локальные свойства непрерывных отображений и функций.

По аналогии с предельными числовыми последовательностями, элемент (точка)  $x_0$  метрического пространства  $(X, d)$  назовём предельным последовательности  $(x_n)$  точек  $x_n \in (X, d)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и обозначим  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такой индекс  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , что  $d(x_0, x_n) < \varepsilon$  для всех  $n \geq N$ .

Пусть  $X, Y, d_X, d_Y$  имеют тот же смысл, что и в пункте 3.1.

Теорема 2. Отображение  $f$  из  $X$  в  $Y$  непрерывно в точке  $x_0 \in X$  тогда и только тогда, когда  $x_0 \in Df$  и для любой последовательности  $(x_n)$  точек  $x_n \in Df, n \in \mathbb{N}$ , имеющих  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ , последовательность  $(f(x_n)), f(x_n) \in Y, n \in \mathbb{N}$ , сходится и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

Эта теорема аналогична критерию непрерывности в точке числовой функции не только формулировкой, но и доказательством, которое опирается на доказательства критерия лишь замены неравенства  $|x - x_0| < \delta$  неравенством  $d_X(x, x_0) < \delta$  и неравенства  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  — неравенством  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

В случае числовых функций критерий непрерывности применяется в частности, для доказательства непрерывности композиций непрерывных функций. Совершенно аналогично доказываются

Теорема 3. Если отображение  $g$  непрерывно в точке  $x_0$ , а отображение  $f$  непрерывно в точке  $y_0 = g(x_0)$ , то композиция  $f \circ g$  этих отображений непрерывна в точке  $x_0$ .

В частности, утверждения теорем 2 и 3 справедливы для функций нескольких переменных ( $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}$ ), для вектор-функций ( $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^n$ ) и для отображений из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ . Более того, в случае  $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}$  на непрерывные функции нескольких переменных переносятся известные для непрерывных числовых функций теоремы о сохранении знака и о локальной ограниченности, а также теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций).

3.3. Предел функции и отображения.

Пусть  $X, Y, d_X, d_Y$  имеют тот же смысл, что и в предыдущих пунктах.

Определение 1. Элемент (точку)  $A \in Y$  называют пределом отображения  $f$  из  $X$  в  $Y$  в точке  $a \in X$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что  $d_Y(f(x), A) < \varepsilon$  для всех  $x \in X, x \neq a$  и  $d_X(x, a) < \delta$ ; или, другими словами,  $d_Y(f(x), A) < \varepsilon$  справедливо для всех  $x$ , принадлежащих прокалывающей  $\delta$ -окрестности  $\dot{V}(a; \delta)$  точки  $a \in X$ . Обозначение:  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Как и в пункте 3.1 убеждаемся, что это определение есть прямое обобщение определения предела числовой функции.

Если  $X = \mathbb{R}^m$  и  $Y = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ , то число  $l \in \mathbb{R}$  называют пределом функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  в точке  $a = (a_1, \dots, a_m)$  тогда и только тогда, когда для произвольного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что  $|f(x) - l| < \varepsilon$  для всех  $x \in \dot{V}(a; \delta)$ , где  $\dot{V}(a; \delta) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; 0 < d_m(x, a) < \delta\}$ . Обозначение:  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Если  $X = \mathbb{R}^m$  и  $Y = \mathbb{R}^n$ , то точку  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$  называют пределом отображения  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , в точке  $a = (a_1, \dots, a_m)$ , тогда и только тогда, когда для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что  $d_m(f(x), l) < \varepsilon$  выполнятся справедливо для всех  $x \in U(a, \delta)$ ; т.е., для всех  $x$ , у которых  $0 < d_m(x, a) < \delta$ .  
Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

Теорема 4. Точка  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$  будет пределом  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  отображения  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  в точке  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$  тогда и только тогда, когда для каждого  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , число  $l_j = \lim_{x \rightarrow a} f_j(x)$ .

Доказательство этой теоремы дословно совпадает с доказательством теоремы 1 из пункта 3.1 с заменой в последнем точки  $x_0$  на точку  $a$ , точки  $f(x_0)$  на точку  $l$ , чисел  $f_j(x_0)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , на числа  $l_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , и добавлением к неравенству  $d_m(x, a) < \delta$  левой части  $0 < d_m(x, a)$ .  
Сравнение определений предела и непрерывности отображения показывает, что отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  непрерывно в точке  $x_0$ , в частности для  $f$ , тогда и только тогда, когда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Замечание 1. Последнее утверждение применим свой на различные понятия непрерывности функций по совокупности аргументов и непрерывности функции нескольких переменных по каждому аргументу.

Так, функции  $f(x, y)$   
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \text{ т.е. если } x = y = 0, \end{cases}$$
непрерывна в точке  $O(0, 0)$  по каждому аргументу  $x$  и  $y$ , поскольку  $f(x, 0) = 0$  для всех  $x \neq 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$ , а также  $f(0, y) = 0$  для всех  $y \neq 0$  и  $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$ . Однако,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  не существует, так как, например, на прямой  $y = x$ ,  $x \neq 0$ , имеем  $f(x, x) = \frac{1}{2}$  для всех  $x \neq 0$  и любая окрестность  $\dot{U}$  точки  $O(0, 0)$  содержит точки  $(x, y)$ , в которых  $f(x, y) = 0$ , и точки  $(x, y)$ , в которых  $f(x, y) = \frac{1}{2} \neq 0$ .

Итак, функция  $f(x, y)$  непрерывна в точке  $O(0, 0)$  по каждому аргументу, но она не непрерывна в  $O(0, 0)$  по совокупности аргументов (так как она не имеет предела в точке  $O(0, 0)$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ).  
С другой стороны, в силу определения 1 из пункта 3.1, не непрерывности функции нескольких переменных по совокупности аргументов следует её непрерывность по каждому аргументу.

### §4. Свойства непрерывных отображений на компактах в $\mathbb{R}^m$ .

#### 4.1. Критерий замкнутого множества в метрическом пространстве.

Определение 1. Элемент (точка)  $a$  метрического пространства  $(X; d)$  называется точкой прикосновения множества  $E \subset X$ , если любая окрестность  $U$  точки  $a$  имеет непустое пересечение с множеством  $E$ ; т.е.,  $E \cap U \neq \emptyset$ .

Понятно, что  $a$  - точка прикосновения множества  $E$  тогда и только тогда, когда  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  для некоторой последовательности  $(x_n)$  точек  $x_n \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Теорема 1. Множество  $F$  в метрическом пространстве  $(X, d)$  замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои точки прикосновения.

◁ Необходимость. Рассмотрим произвольное замкнутое множество  $F$  в  $(X, d)$ . Тогда, по определению, множество  $G = X \setminus F$  — открытое и  $G \cap F = \emptyset$ . Для каждой своей точки  $x \in G$  открытое множество  $G$  служит окрестностью, которая не пересекается с  $F$ . Таким образом, согласно определению 1, каждая точка множества  $G = X \setminus F$  не является точкой прикосновения множества  $F$ . Другими словами,  $F$  содержит все свои точки прикосновения.

◁ Достаточность. Пусть множество  $F \subset X$  содержит все свои точки прикосновения, так что любая точка  $x \in X \setminus F = G$  не есть точка прикосновения множества  $F$ . Тогда, согласно определению 1, существует такая окрестность  $U_x$  точки  $x$ , что  $U_x \cap F = \emptyset$ , так что  $U_x \subset X \setminus F = G$ . Таким образом, множество  $G$  служит окрестностью (мобой) своей точки  $x$ , и поэтому,  $G$  — открытое множество в  $(X, d)$ . Следовательно, множество  $F = X \setminus G$  — замкнутое. ▷

#### 4.2. Ограниченные множества, компакты в $\mathbb{R}^m$ .

Определение 2. Множество в  $\mathbb{R}^m$  называют ограниченным, если существует шар в  $\mathbb{R}^m$ , центром содержащий это множество.

Определение 3. Замкнутое и ограниченное множество в  $\mathbb{R}^m$  называют компактом (или компактным множеством).

Например, любой замкнутый шар  $B(a, r)$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$ ,  $r > 0$ , — компакт в  $\mathbb{R}^m$ ; любой отрезок  $[a, b]$  — компакт в  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ .

Замечание 1. Определение ограниченности множества  $E \subset \mathbb{R}^m$  можно сформулировать эквивалентным образом:  $E \subset \mathbb{R}^m$  ограничено в том и только в том случае, когда существуют такие отрезки  $[a_i, b_i]$ ,  $1 \leq i \leq m$ , что для каждой точки  $x = (x_1, \dots, x_m) \in E$  справедливо  $a_i \leq x_i \leq b_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Опираясь на это замечание, на многомерный случай переносим теорему Больцано о выделении сходящейся подпоследовательности из любой ограниченной числовой последовательности.

Теорема 2. Любая ограниченная последовательность  $(x_n)$  точек  $x_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  — произвольное и фиксированное, содержит сходящуюся подпоследовательность.

Замечание 2. Полезно следующее утверждение: если все точки последовательности  $(x_n)$  принадлежат замкнутому множеству  $F$  в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  — фиксировано, то  $(x_n)$  сходится к точке  $x_0$ , то  $x_0 \in F$ .

◁ Так как  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  и все  $x_n \in F$ , то  $x_0$  — точка прикосновения множества  $F$ , которое содержит все свои точки прикосновения, так что  $x_0 \in F$ . ▷

### 4.3. Непрерывные функции и отображения на компактах в $\mathbb{R}^m$ (15)

Теорема 3 (первая теорема Вейерштрасса). Если  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  — фиксировано, и функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  непрерывна на  $K$  (непрерывна в каждой точке множества  $K$ ), то  $f$  ограничена на  $K$ .  
 Если предположить, что  $f$  не ограничена на  $K$ , то для любого  $n \in \mathbb{N}$  можно указать такую точку  $x_n \in K$ , что  $|f(x_n)| > n$ . Так как  $K$  — ограниченное множество в  $\mathbb{R}^m$ , то последовательность  $(x_n)$  ограничена и по теореме 2 пункта 4.2 содержит сходящуюся подпоследовательность  $(x_{n_k})$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ . Точка  $x_0 \in K$ , по-скольку  $K$  — замкнутое множество (см. замечание 1 к пункту 4.2), и  $f$  непрерывна в  $x_0$ . Согласно критерию непрерывности (теорема 2 пункта 3.2, § 3),  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ , так что  $(f(x_{n_k}))$  ограничена (как сходящаяся). С другой стороны,  $|f(x_{n_k})| > n_k \geq k, k \in \mathbb{N}$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.  $\triangleright$

Множество значений, принимаемых функцией  $f(x_1, \dots, x_m)$  на компакте  $K \subset \mathbb{R}^m$ , обозначим символом  $f(K)$ . Первая теорема Вейерштрасса утверждает, что числовое множество  $f(K)$  ограничено (в  $\mathbb{R}$ ), и следовательно, существуют конечные  $\inf f(K) = m$ ,  $\sup f(K) = M$ , так что  $m \leq f(x) = f(x_1, \dots, x_m) \leq M$  для всех  $x \in K$ .

Теорема 4 (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на компакте  $K \subset \mathbb{R}^m$  функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  достигает на  $K$  своих наименьшего и наибольшего значений; т.е., найдутся точки  $x' = (x'_1, \dots, x'_m), x'' = (x''_1, \dots, x''_m) \in K$ , в которых  $m = f(x') \leq f(x) \leq f(x'') = M$  для всех  $x \in K$ .

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство второй теоремы Вейерштрасса в одномерном случае с единственной заменой в нём отрезка  $[a, b]$  на множество  $K$ .  $\triangleright$

Первая теорема Вейерштрасса распространяется на непрерывные отображения из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Теорема 5. Если  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$  и отображение  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m), 1 \leq j \leq n$ , из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  непрерывно на  $K$ , то множество  $f(K)$  ограничено в  $\mathbb{R}^n$ .

По теореме 1 пункта 3.1, § 3, все функции  $f_j(x), 1 \leq j \leq n$ , непрерывны на  $K$ . Согласно первой теореме Вейерштрасса (теорема 3), все множества  $f_j(K), 1 \leq j \leq n$ , ограничены в  $\mathbb{R}$ , так что существуют такие числа  $a_j, b_j, 1 \leq j \leq n$ , что  $a_j \leq f_j(x) \leq b_j$  для всех  $x \in K$  и  $1 \leq j \leq n$ . В силу замечания 1 из пункта 4.2, множество  $f(K)$  ограничено в  $\mathbb{R}^n$ .  $\triangleright$

Теорема 6. Если  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$  и отображение  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  непрерывно на  $K$ , то множество  $f(K)$  замкнуто в  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $A = (A_1, \dots, A_n)$  — произвольная точка прикосновения множества  $f(K)$ . Требуется доказать, что  $A$  принадлежит  $f(K)$ , т.е., что найдется некоторая точка  $x_0 \in K$ , в которой  $f(x_0) = A$ . Так как  $A$  — точка прикосновения множества  $f(K)$ , то любая ее  $\delta$ -окрестность обязана содержать некоторую точку  $f(x)$ ,  $x \in K$ . Полагая  $\delta_k = \frac{1}{k} > 0$ , найдем некоторую последовательность  $(x_k)$  точек  $x_k \in K$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , для которой  $d_n(f(x_k), A) < \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Последовательность  $(x_k)$  ограничена, так как, по условию, ограничено множество  $K$  (компакт), и следовательно, по теореме 2 этого пункта, она содержит сходящуюся подпоследовательность  $(x_{n_\nu})$ . Обозначим  $x_0 = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} x_{n_\nu}$ . Тогда  $x_0 \in K$ , так как компакт  $K$  — замкнутое множество. По построению точек  $x_{n_\nu}$ , выполняются неравенства  $d_n(f(x_{n_\nu}), A) < \frac{1}{n_\nu} \leq \frac{1}{\nu}$ , откуда следует, что  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f(x_{n_\nu}) = A$ . Так как отображение  $f$  непрерывно на  $K$ , то  $A = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f(x_{n_\nu}) = f(\lim_{\nu \rightarrow +\infty} x_{n_\nu}) = f(x_0)$ .  $\square$

Последние две теоремы утверждают важное наблюдение: непрерывный образ компактного множества в  $\mathbb{R}^n$  есть компакт.

## Глава 2. Дифференцируемые функции нескольких переменных.

### §1. Частные производные.

#### 1.1. Основные определения и обозначения.

Рассмотрим функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ , область определения которой состоит из открытого множества  $D_f$  в  $\mathbb{R}^m$ , и фиксируем точку  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f$ . Разность между произвольным  $x' \in D_f$  и  $x$  называют (полным) приращением аргумента  $x$  функции  $f$  и обычно ~~называют~~ обозначают  $\Delta x$ . Таким образом,  $\Delta x = x' - x$ ,  $x' = x + \Delta x$ ; здесь  $\Delta x$  - вектор размерности  $m$ , и если  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ , то  $\Delta x = x' - x = (x'_1 - x_1, \dots, x'_m - x_m) = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ ,  $\Delta x_k = x'_k - x_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , а также  $\Delta x = \sum_{k=1}^m \Delta x_k e^k = \Delta x_1 e^1 + \dots + \Delta x_m e^m$ , где  $e^k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , - векторы стандартного базиса в  $\mathbb{R}^m$ .

Рассматривают также случай, когда действительно именно только одна из координат вектора  $x$ ; скажем,  $k$ -ая. Это выражается в том, что  $\Delta x = \Delta x_k e^k = (0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0)$ , где  $\Delta x_k$  считают как  $k$ -ю часть, а остальные координаты - нули.

Разность (число)  $\Delta f(x) = f(x') - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$  называют (полным) приращением функции  $f$  в точке  $x$ , а разность  $\Delta_k f(x) = f(x + \Delta x_k e^k) - f(x)$  - частным приращением функции  $f$  в точке  $x$  по  $k$ -ому аргументу  $x_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ ; в координатных обозначениях:

$$\Delta_k f(x) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m).$$

Определение 1. Частной производной функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  по  $k$ -ой переменной (по " $x_k$ ") называют функцию - будем обозначать её  $\partial_k f(x)$ , - задаваемую следующими условиями: 1) областью её определения служит множество всех тех точек  $x \in D_f$ , для которых  $\frac{f(x + \Delta x_k e^k) - f(x)}{\Delta x_k}$  имеет предел при  $\Delta x_k \rightarrow 0$ ;

2) в каждой такой точке значение  $\partial_k f(x)$  равно этому пределу

$$\partial_k f(x) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x_k e^k) - f(x)}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k f(x)}{\Delta x_k} \quad (1)$$

В координатной записи формула (1) имеет вид

$$\partial_k f(x) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)}{\Delta x_k}$$

В частности, для функции  $f(x, y)$  двух переменных

$$\partial_1 f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad \partial_2 f(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

( $h$  и  $k$  - стандартные обозначения для приращений первого и второго аргументов функции двух переменных, наряду с  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ).

Для  $\partial_k f$  обычно употребляют классические обозначения  $f'_{x_k}$  или  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  (где функции  $f(x,y)$  употребительны обозначения  $f'_x, f'_y$  или  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ).

Отметим, что  $\partial_k f$  есть производная от функции одной ( $k$ -ой) переменной.

Действительно, рассмотрим  $k$ -ую частную функцию  $\varphi_k(z) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, z, x_{k+1}, \dots, x_m)$  от переменной  $z$ . Тогда  $f(x) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = \varphi_k(x_k)$ , а  $f(x + \Delta x_k e^k) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = \varphi_k(x_k + \Delta x_k)$ , так что, согласно (1),  $\partial_k f(x) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x_k e^k) - f(x)}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\varphi_k(x_k + \Delta x_k) - \varphi_k(x_k)}{\Delta x_k} = \varphi'_k(x_k)$ .

Таким образом, вычисление частных производных функции нескольких переменных сводится к вычислению обычных производных числовых функций, и значит, новой техники не требуется.

Пример функции  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0 \text{ (} x=0, y=0 \text{)}, \end{cases}$  показывает, что  $f(x,0) \equiv 0, f(0,y) \equiv 0$ , и следовательно,  $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$ , хотя  $f(x,y)$  разрывна в  $(0,0)$  (по совокупности переменных).

1.2. Производные по направлению. Частные производные - частный случай производных по направлению. Каждый орт (вектор единичной длины)  $e$  в  $\mathbb{R}^m$  задает свое направление. Когда говорим, что точка  $x'$  находится от точки  $x$  в направлении орта  $e$ , имеем в виду, что  $x' = x + \rho e$ , где число  $\rho > 0$ . В частности, координатные орты  $e^k, 1 \leq k \leq m$ , задают положительные направления координатных осей.

Определение 2. Производной по направлению орта  $e$  функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  называем функцию - будем обозначать её  $\partial_e f$  - задаваемую следующими условиями: 1) областью её определения служат множества всех тех точек  $x \in D_f$ , в которых  $\frac{f(x+te) - f(x)}{t}$  имеет предел при  $t \rightarrow 0$ ; 2) в каждой такой точке значение  $\partial_e f(x)$  равно этому пределу 
$$\partial_e f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t} \quad (2)$$

В частности,  $\partial_k f(x) = \partial_{e^k} f(x), 1 \leq k \leq m$ .

Чтобы записать формулу (2) в координатной форме, напомним, что угол между векторами  $x, y \in \mathbb{R}^m$  называем тот единственный угол  $\varphi \in [0, \pi]$ , для которого  $\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_m \cdot \|y\|_m}$ , так что  $\langle x, y \rangle = \|x\|_m \cdot \|y\|_m \cdot \cos \varphi$ . Далее, если  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , то  $x_k = \langle x, e^k \rangle, 1 \leq k \leq m$ , где  $e^k, 1 \leq k \leq m$ , - векторы стандартного базиса в  $\mathbb{R}^m$ .

Пусть орт  $e, \|e\|_m = 1$ , имеет координаты  $e = (e_1, \dots, e_m)$  и  $\alpha_k$  - угол между  $e$  и  $e^k, 1 \leq k \leq m$ . Тогда координата  $e_k = \langle e, e^k \rangle = \|e\|_m \cdot \|e^k\|_m \cos \alpha_k = \cos \alpha_k, 1 \leq k \leq m$ , так что  $e = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_m)$  и  $\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_m$  называются

направляющим косинусам орта  $e$ . Он удовлетворяет соотношению

$$\sum_{k=1}^m \cos^2 \alpha_k = 1 \quad (= \|e\|_m).$$

Теперь  $x + te = (x_1 + t \cos \alpha_1, \dots, x_m + t \cos \alpha_m)$ , и значит,

$$\partial_e f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + t \cos \alpha_1, \dots, x_m + t \cos \alpha_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{t}. \quad (2')$$

Формула (2') показывает, что  $\partial_e f(x)$  есть обычная производная некоторой функции одного переменного.

Действительно, считая координаты точки  $x$  и орта  $e$  фиксированными, положим  $\varphi(t) = f(x_1 + t \cos \alpha_1, \dots, x_m + t \cos \alpha_m)$ . Тогда

$$\partial_e f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0). \quad (3) \quad \Delta$$

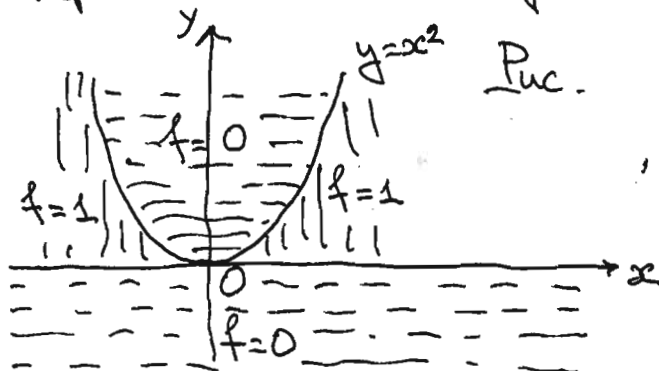
Практический способ вычисления производной по направлению указан ниже в § 2.

### 1.3. Важное замечание.

Функция одного действительного переменного, имеющая в данной точке производную, непрерывна в этой точке. С другой стороны, как мы видели в пункте 1.1, для функций нескольких переменных наличие в данной точке всех частных производных не влечёт уже непрерывности. Более того, и существование производных по всем направлениям не гарантирует непрерывности. Это видно на примере функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{если } y \leq 0 \text{ или } y \geq x^2. \end{cases}$$

(см. рис.). Функция разрывна в точке  $O(0, 0)$ , однако не каждой прямой, проходящей через точку  $O(0, 0)$ , имеется окрестность этой точки, на которой  $f$  постоянна (и равна 0), а отсюда следует, что  $f$  в точке  $O(0, 0)$  по любому направлению имеет производную, равную нулю.



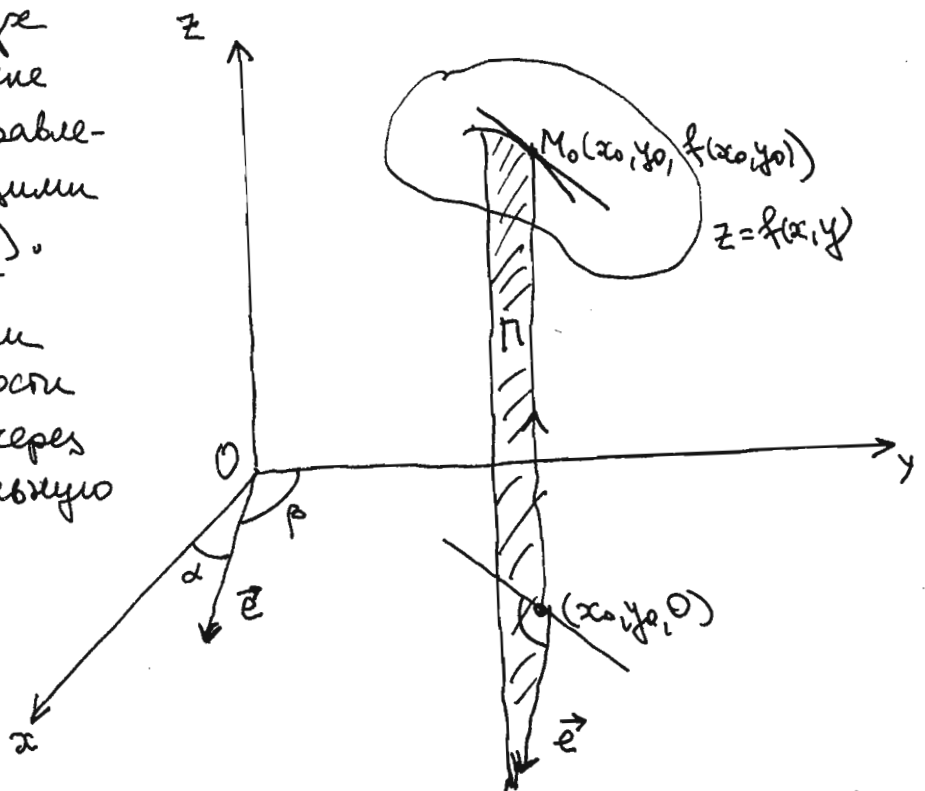
## § 2. Дифференцирование функций нескольких переменных.

### 2.1. Понятие дифференцируемой функции.

Для функций одного переменного существование производной было равносильно дифференцируемости, т.е. "локальной линейности" приращений функции. Понятие линейной функции переносится на локальные векторные пространства; в частности, на  $\mathbb{R}^m$ . Это позволяет распространить на  $\mathbb{R}^m$  также понятие дифференцируемой функции.

# 1.4. Геометрический смысл производной по направлению.

Пусть  $f$  — функция двух переменных, имеющая в точке  $(x_0, y_0)$  производную по направлению орта  $\vec{e}$  с направляющим косинусом  $\cos \alpha, \cos \beta (= \sin \alpha)$ . Выясним геометрический смысл последней. Отложим от точки  $(x_0, y_0, 0)$  в плоскости  $z=0$  вектор  $\vec{e}$ , проведём через него плоскость  $\Pi$ , параллельную оси  $z$ , и введём на  $\Pi$  прямоугольные декартовы координаты, приняв  $\vec{e}$  за осевую ось абсцисс, а перпендикулярную к ней ось ординат.



протянувшись через точку  $(x_0, y_0, 0)$  параллельно оси  $z$  и одинаково с этой осью направленно — за ось ординат (см. рис.). Точка  $(t, 0)$  плоскости  $\Pi$  будет иметь на плоскости  $(x, y)$  координаты  $x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha$  и плоскость  $\Pi$  высекает на графике функции  $f$  линию, являющуюся в  $\Pi$  графиком функции  $\varphi(t) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$ . Поскольку  $\varphi$  дифференцируема в точке  $t=0$ , график  $\varphi$  в  $\Pi$  имеет в соответствующей точке касательную, причём тангенс угла между этой касательной и вектором  $\vec{e}$  равен  $\varphi'(0)$ . Но  $\varphi'(0) = (\partial_{\vec{e}} f)(x_0, y_0)$ . Таким образом,  $\partial_{\vec{e}} f(x_0, y_0)$  равна тангенсу угла, образованного с плоскостью  $(x, y)$  касательной в точке  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  к сечению графика функции  $f$  плоскостью  $\Pi$ .

(4)

Определение 1. Функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  называют дифференцируемой в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f$ , если  $D_f$  - окрестность точки  $x$  и приращение функции  $f(x+\Delta x) - f(x)$  можно представить в виде

$$f(x+\Delta x) - f(x) = l(\Delta x) + \alpha(\Delta x) \|\Delta x\|_m, \quad (1)$$

где  $l(h) = \sum_{k=1}^m a_k h_k = a_1 h_1 + \dots + a_m h_m$  - некоторая линейная функция в  $\mathbb{R}^m$  аргумента  $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$  и  $a = (a_1, \dots, a_m)$  - фиксированная точка в  $\mathbb{R}^m$ , а функция  $\alpha(\Delta x) = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  непрерывна в точке  $0 = (0, \dots, 0)$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0 = \alpha(0)$ . Обозначение:  $f \in \mathcal{D}(x)$ .

Ометим также, что функция  $\|x\|_m = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$  непрерывна в каждой точке  $x \in \mathbb{R}^m$ , как композиция непрерывных функций, так что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|\Delta x\|_m = 0 = \|0\|_m$ .

Лемма 1. Функция  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x \in D_f$ ,  $D_f$  - открытое множество в  $\mathbb{R}^m$ , тогда и только тогда, когда справедлива формула

$$f(x+\Delta x) - f(x) = l(\Delta x) + \sum_{k=1}^m \alpha_k(\Delta x) \Delta x_k, \quad (2)$$

в которой  $l$  - линейная функция в  $\mathbb{R}^m$  (таким, как в (1)), а функции  $\alpha_k(\Delta x) = \alpha_k(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ ,  $1 \leq k \leq m$ , непрерывны в точке  $\Delta x = 0$  (т.е.  $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) = (0, \dots, 0)$ ) и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_k(\Delta x) = 0 = \alpha_k(0)$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

Пусть  $f \in \mathcal{D}(x)$ , так что справедлива формула (1). Но

$$\alpha(\Delta x) \|\Delta x\|_m = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k(\Delta x)}{\|\Delta x\|_m} (\Delta x_k)^2, & \text{если } \Delta x \neq 0, \\ 0, & \text{если } \Delta x = 0. \end{cases}$$

Следовательно, правая часть в формуле (1) представлена в виде (2), где

$$\alpha_k(\Delta x) = \begin{cases} \frac{\alpha_k(\Delta x)}{\|\Delta x\|_m} \Delta x_k, & \text{если } \Delta x_k \neq 0, \\ 0, & \text{если } \Delta x_k = 0. \end{cases}$$

и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_k(\Delta x) = 0 = \alpha_k(0)$ ,  $1 \leq k \leq m$ , поскольку  $|\alpha_k(\Delta x)| \leq |\alpha(\Delta x)|$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

Обратно, пусть справедлива формула (2). Положим

$$\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \frac{1}{\|\Delta x\|_m} \sum_{k=1}^m \alpha_k(\Delta x) \Delta x_k, & \text{если } \Delta x \neq 0, \\ 0, & \text{если } \Delta x = 0. \end{cases}$$

Тогда формула (2) переходит в формулу (1) и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0 = \alpha(0)$  по неравенству Коши

$$|\alpha(\Delta x)| \leq \frac{1}{\|\Delta x\|_m} \sqrt{\sum_{k=1}^m \alpha_k^2(\Delta x)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^m \Delta x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^m \alpha_k^2(\Delta x)}, \Delta x \neq 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_k(\Delta x) = 0, 1 \leq k \leq m. \quad \triangleright$$

Теорема 2. Функция  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$ , дифференцируемая в точке  $x$ , непрерывна в этой точке.

$\triangleleft$  Каждая из функций в правой части формулы (1) непрерывна в точке  $\Delta x = 0$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} l(\Delta x) = l(0) = 0$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \|\Delta x\|_m = 0$ . Поэтому,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$  и  $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x)$ ; т.е., функция  $f$  непрерывна в точке  $x$ .  $\triangleright$

## 2.2. Дифференцируемость и частные производные.

Теорема 3. Функция  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$ , дифференцируемая в точке  $x$ , имеет в  $x$  все частные производные  $\partial_k f(x)$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

$\triangleleft$  Согласно определению 1 и теореме 1,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^m a_k \Delta x_k + \sum_{k=1}^m \alpha_k(\Delta x) \Delta x_k.$$

Теперь, фиксируя  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , и выбирая  $\Delta x = \Delta x_k e^k = (0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0)$ , получим

$$f(x + \Delta x_k e^k) - f(x) = a_k \Delta x_k + \alpha_k(\Delta x_k e^k) \Delta x_k$$

откуда

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x_k e^k) - f(x)}{\Delta x_k} = a_k + \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \alpha_k(\Delta x_k e^k) = a_k,$$

и, по определению,  $a_k = \partial_k f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ ,  $1 \leq k \leq m$ .  $\triangleright$

Следствие. Если функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in Df$ , то

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \Delta x_k + \alpha(\Delta x) \|\Delta x\|_m, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0 = \alpha(0). \quad (3')$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \Delta x_k + \sum_{k=1}^m \alpha_k(\Delta x) \Delta x_k, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_k(\Delta x) = 0 = \alpha_k(0), 1 \leq k \leq m, \quad (3'')$$

и  $f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \Delta x_k + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0, \quad (3''')$

где функция  $o(\Delta x)$  непрерывна в точке  $\Delta x = 0$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\|\Delta x\|_m} = 0 = o(0)$ .

$\triangleleft$  Формула (3'') есть прямое следствие формулы (3').  $\triangleright$

Теорема 4. Если пункт  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in Df$ , то она имеет в  $x$  ~~дифференциал~~ <sup>линейные</sup> ~~линейные~~ <sup>линейные</sup>  $\partial_e f(x)$  по всем направлениям, и если  $e = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_m)$ , то

$$\partial_e f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot \cos \alpha_k. \quad (4)$$

Согласно следствию к теореме 3, справедлива формула

$$(3') \quad f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \Delta x_k + \sum_{k=1}^m \alpha_k(\Delta x) \Delta x_k, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_k(\Delta x) = 0 = \alpha_k(0), \quad 1 \leq k \leq m.$$

Если  $\Delta x = te = (t \cos \alpha_1, \dots, t \cos \alpha_m)$ , то  $\Delta x_k = t \cos \alpha_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , и

$$\begin{aligned} f(x + te) - f(x) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot t \cos \alpha_k + \sum_{k=1}^m \alpha_k(te) \cdot t \cos \alpha_k = \\ &= t \left[ \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cos \alpha_k + \sum_{k=1}^m \alpha_k(te) \cos \alpha_k \right], \end{aligned}$$

тогда существует

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t} &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cos \alpha_k + \sum_{k=1}^m \cos \alpha_k \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_k(te) = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \cos \alpha_k, \end{aligned}$$

который, с другой стороны (по определению), равен

$$\partial_e f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cos \alpha_k. \quad \triangleright$$

### 2.3. Градиент.

Пусть  $p$ -ия  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in Df$ . Тогда существуют все  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Вектор  $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x))$  называется градиентом функции  $f$  в точке  $x$ . и обозначается  $\text{grad } f(x)$ . Формулу (4) можно переписать иначе так:

$$\partial_e f(x) = \langle \text{grad } f(x), e \rangle. \quad (5)$$

Лемма 5. Если  $\text{grad } f(x) \neq 0$ , то функция  $\partial_e f(x)$  имеет наибольшее значение, когда  $e = \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|_m}$ ; и т.е., когда  $e$  — "направленный" опт "градиента".

А то неравенство Коши-Буняковского и (5),

$$|\partial_e f(x)| = |\langle \text{grad } f(x), e \rangle| \leq \|\text{grad } f(x)\|_m \cdot \|e\|_m = \|\text{grad } f(x)\|_m$$

где под опт  $e$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f(x), \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|_m} \rangle &= \frac{1}{\|\text{grad } f(x)\|_m} \cdot \langle \text{grad } f(x), \text{grad } f(x) \rangle = \\ &= \frac{1}{\|\text{grad } f(x)\|_m} \cdot \|\text{grad } f(x)\|_m^2 = \|\text{grad } f(x)\|_m, \end{aligned}$$

так что  $\|\text{grad } f(x)\|_m$  — наибольшее значение функции  $|\partial_e f(x)|$  и это значение принимается тогда, когда  $e$  — опт вектора  $\text{grad } f(x)$ .  $\triangleright$

Используя производную  $\nabla_x f(x)$  функции  $f$  по направлению  $x$  в точке  $x$  как скорость изменения  $f$  в этом направлении, можно сказать, что градиент функции в точке есть вектор, указывающий направление и скорость наибольшего роста функции в этой точке. Отметим ещё, что  $\|\text{grad } f(x)\|_m = \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right)^2}$ .

## 2.4. Достаточное условие дифференцируемости.

Лемма 6. Функция  $f(x, y)$  будет дифференцируемой в точке  $M(x, y)$ , если  $f'_x$  определена и конечна в точке  $M(x, y)$ , а  $f'_y$  определена в окрестности  $U$  этой точки и непрерывна в самой точке  $M(x, y)$  (функции  $f'_x$  и  $f'_y$  можно в этой формулировке поменять местами).

Представим разность  $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  в виде суммы двух разностей

$$\Delta f = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \quad (6)$$

(здесь точки  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  и  $(x, y + \Delta y)$  принадлежат  $U$ ).

Так как  $f'_y(x, y)$  существует и конечно, то по её определению

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y) \Delta y + \alpha_2(\Delta y) \Delta y, \quad (7)$$

где  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha_2(\Delta y) = 0$  и функцию  $\alpha_2(\Delta y)$ , определённую первоначально для  $\Delta y \neq 0$ , можно распределить значением  $\alpha_2(0) = 0$  и считать по-прежнему непрерывной функцией в точке  $\Delta y = 0$ , и следовательно, такой же бесконечно малой функцией при  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ , непрерывной в точке  $(0, 0)$ . Далее, по формуле конечных разностей, имеем

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \cdot f'_x(x + \theta \Delta x, y + \Delta y), \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда, в силу непрерывности функции  $f'_x$  в точке  $(x, y)$ , находим

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) \Delta x + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x, \quad (8)$$

где  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \alpha_1(\Delta x, \Delta y) = 0$  и  $\alpha_1(0, 0) = 0$ .

Подставив выражение (7) и (8) в (6), получим представление

$$\Delta f = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

для всех  $(\Delta x, \Delta y)$  из некоторой окрестности точки  $(0, 0)$ , которое указывает на свойство дифференцируемости функции  $f(x, y)$  в точке  $(x, y)$ .

Замечание. Доказанная теорема, равносильная справедлива при более сильных предположениях о существовании обеих частных производных  $f'_x$  и  $f'_y$  в некоторой окрестности  $U$  точки  $M(x, y)$  и непрерывности их в точке  $M(x, y)$ . Именно в таких предположениях утверждение теоремы переносится на функции любого числа переменных.

Теорема 6'. Функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  будет дифференцируемой в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f$ , если все её частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_k}, 1 \leq k \leq m$ , определены в некоторой окрестности  $U \subset D_f$  точки  $x$  и непрерывны в  $x$ .

Определение 2. Функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  называют принадлежащей классу  $C^1$  на открытом множестве  $G \subset D_f$ , если всюду в  $G$  существуют и непрерывны все частные производные функции  $f$ .

На основании теоремы 6' заключаем, что функции класса  $C^1$  на открытом множестве  $G$  дифференцируемы (а следовательно, и непрерывны) в каждой точке множества  $G$ .

2.5. Частные производные сложной функции.

Теорема 7. Пусть функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет  $D_f = G$  - открытое множество в  $\mathbb{R}^m$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in G$ . Пусть функции  $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k), 1 \leq i \leq m$  служат компонентами непрерывного отображения  $x = \varphi(t) \in \mathbb{R}^m, k \geq 1$ , в  $\mathbb{R}^m$ , имеющего  $D_\varphi = \varphi^{-1}(G)$  открытым множеством в  $\mathbb{R}^k$ , и все функции  $\varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k), 1 \leq i \leq m$ , дифференцируемы в точке  $t = (t_1, \dots, t_k) \in \varphi^{-1}(G) = D_\varphi = D\varphi_i, 1 \leq i \leq m$ , в которой  $\varphi(t) = x$ . Тогда композиция  $F(t) = (f \circ \varphi)(t), F(t) = F(t_1, \dots, t_k)$ , будет дифференцируемой функцией в точке  $t = (t_1, \dots, t_k)$  и справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \\ &= \dots \\ \frac{\partial F}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \end{aligned} \quad (9)$$

в которых все  $\frac{\partial F}{\partial t_j}$  и  $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}, 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m$ , берутся в точке  $t$ , а все  $\frac{\partial f}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq m$ , - в точке  $x = \varphi(t)$ .

Рассмотрим открытый шар  $U$  с центром в  $x$  и  $U \subset G$ . Тогда, согласно следствию к теореме 3 и формуле (3'), разложение

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Delta x_i + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0, \quad (10)$$

справедливо для всех  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ , что  $(x + \Delta x) \in U$ , а функция  $o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$ , непрерывна в точке  $\Delta x = 0$ . Обозначим  $V = \varphi^{-1}(U) \subset D_\varphi = D\varphi_i, 1 \leq i \leq m$ . Так как отображение  $x = \varphi(t)$  непрерывно, множество  $\varphi^{-1}(U)$  - открытое; т.е.,  $V$  - окрестность точки  $t$ . В силу дифференцируемости каждой функции  $\varphi_i(t), 1 \leq i \leq m$ , в точке  $t$  и на основании следствия к теореме 3 и формулы (3), заключаем, что для любого  $\Delta t = (\Delta t_1, \dots, \Delta t_k), (t + \Delta t) \in V$ , справедливо представление

$$\Delta x_i = \varphi_i(t + \Delta t) - \varphi_i(t) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \Delta t_j + \alpha_j(\Delta t) \|\Delta t\|_k, 1 \leq i \leq m, \quad (11)$$

в которых  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_j(\Delta t) = 0 = \alpha_j(0), 1 \leq j \leq k$ , а также оценки

$$\begin{aligned} |\Delta x_i| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^k |\Delta t_j|^2} + |\alpha_j(\Delta t)| \cdot \|\Delta t\|_k \leq \\ &\leq M \cdot \|\Delta t\|_k + |\alpha_j(\Delta t)| \cdot \|\Delta t\|_k, 1 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (12)$$

в которых использованы неравенство Коши - Буняковского и обозначение  $M = \sqrt{k} \cdot \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right|$ . Оценки (12) показывают, что

$$\Delta x_i = O(\Delta t), \Delta t \rightarrow 0, 1 \leq i \leq m,$$

(13)

и функции  $O(\Delta t), \Delta t \rightarrow 0$ , непрерывны в  $\Delta t = 0$ ,

теперь, опираясь на свойства непрерывности композиции непрерывных функций и на оценку (13), разность  $F(t+\Delta t) - F(t) = (f \circ g)(t+\Delta t) - (f \circ g)(t)$ , с учётом представления (10) и (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F(t+\Delta t) - F(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \left[ \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \Delta t_j + \alpha_i(\Delta t) \|\Delta t\|_k \right] + o(O(\Delta t)) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \Delta t_j + o(\Delta t) + o(O(\Delta t)) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right) \Delta t_j + o(\Delta t), \Delta t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где функция  $o(\Delta t), \Delta t \rightarrow 0$ , непрерывна в  $\Delta t = 0$ . Представление (14) показывает, что  $F(t)$  дифференцируема в точке  $t$  и что её частные производные  $\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t), 1 \leq j \leq k$ . Последние равенства формулам (9).  $\Delta$

Отметим важный частный случай теоремы 7, когда  $k=1$ ; т.е., когда  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  — числовые функции переменного  $t$ . В этом случае формулы (9) принимают вид

$$F'(t) = \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}, x_i = \varphi_i(t), 1 \leq i \leq m. \quad (15)$$

### §3. Дифференциал функции нескольких переменных.

#### 3.1. Определение и основные свойства

Рассмотрим функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ , дифференцируемую в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$ . Тогда в точке  $x$  определён градиент  $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x))$  функции  $f$ .

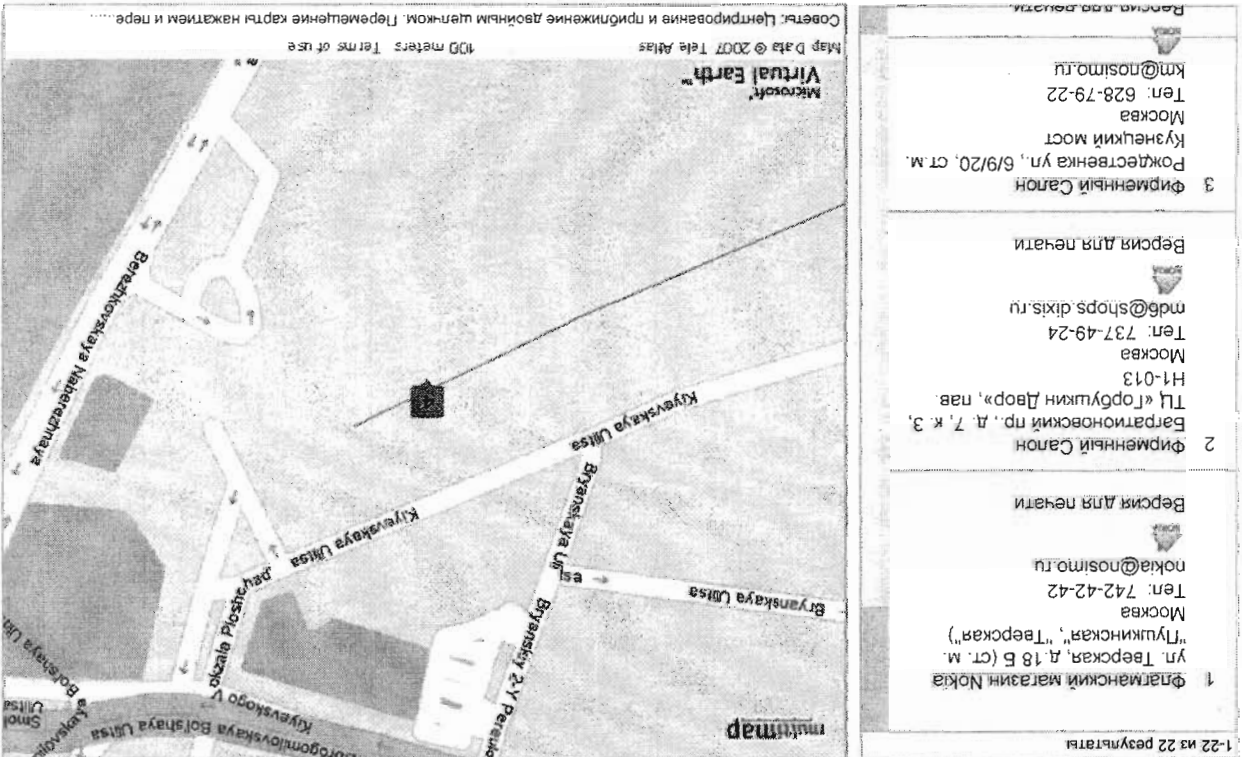
Линейную функцию

$$L(x; h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) h_m$$

аргумента  $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$  называем дифференциалом функции  $f$  в точке  $x$  и обозначаем  $df(x)(h)$ ; т.е.,

$$df(x)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) h_m, h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Прием в утилизацию



5.6 Локальная формула Тейлора

Пусть  $f$ -як определена в окрестности  $\gamma(x) = (\alpha, \beta)$  такой  $x$ ,  $\alpha < x < \beta$ .  
и имеет в  $(\alpha, \beta)$  непрерывные производные  $f^{(k)}$  до порядка  $k = n+1$   
включительно. Если  $x+h \in (\alpha, \beta)$ , то  $f$ -я Тейлора с центром в  $x$   
имеет вид

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

$0 < \theta < 1$ . В частности,  $h^k f^{(k)}(x) = d^k f(x)$ ,  $1 \leq k \leq n+1$ , и  $f(x+h) - f(x) =$   
 $= \Delta f(x)(h)$ , замечая, что

$$\Delta f(x) = \frac{d f(x)}{1!} + \frac{d^2 f(x)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x)}{n!} + \left[ \frac{d^{n+1} f(x)}{(n+1)!} \right] x + \theta dx \quad (1)$$

В замеч (1) формула Тейлора непосредственно на  $f$ -як бесконечных  
действ. переменных.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ . По формуле Тейлора  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}$ .

Если  $f(x) = f_i(x) = x_i, 1 \leq i \leq m$ , то  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = 1, x \in \mathbb{R}^m$ , и  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0, x \in \mathbb{R}^m, i \neq j$ . Тогда  $dx_i(h) = df_i(x)(h) = 1 \cdot h_i, 1 \leq i \leq m$ , и

$$df(x)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) dx_m(h), h \in \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Отсюда, используя только символы, обозначающие функции, заключаем, что

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) dx_m. \quad (1)$$

Последнее предложение (здесь) инвариантно относительно замены переменных  $x_i, 1 \leq i \leq m$ , функции  $x_i = \varphi_i(t), t \in \mathbb{R}^k, k \geq 1$  — функции.

Действительно, согласно теореме 7 предыдущего § 2 и определению (1),

$$\begin{aligned} d(f \circ \varphi)(t) &= dF(t) = \frac{\partial F}{\partial t_1} dt_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_m} dt_m = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) dt_j = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i. \quad \Delta \end{aligned}$$

Следствие (правила вычисления дифференциалов). Справедливы формулы: а)  $d(cu) = cdu, c \in \mathbb{R}$  — постоянное; б)  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ; в)  $d(uv) = u dv + v du$ ; г)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, v(x) \neq 0$ ; д)  $dc = 0, c \in \mathbb{R}$ .

Проверим, например, справедливость в). Положим  $z = uv = z(u, v)$ . Тогда  $dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = v du + u dv$ , независимо от того, являются ли  $u$  и  $v$  независимыми аргументами или функциями.  $\Delta$

### 3.2. Геометрический смысл дифференциала.

Определение. Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в точке  $P_0(x_0, y_0)$  внутренней для  $Df$ . Касательной плоскостью к графику функции  $f$  в точке  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  называем такую плоскость, проходящую через  $M_0$ , что расстояние  $MN$  от точки  $M(x, y, f(x, y))$  графика до этой плоскости бесконечно мало по сравнению с  $M_0M$  или  $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ .

Теорема. Если функция  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $P_0(x_0, y_0)$ , то график  $z = f(x, y)$  этой функции обладает в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0), z_0 = f(x_0, y_0)$ , касательной плоскостью, которая задается уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (2)$$

так что значение дифференциала функции  $f$  в точке  $P_0(x_0, y_0)$  при приращении  $x - x_0, y - y_0$  аргументов равно приращению  $z - z_0$  аппликаты точки касательной плоскости (текущие координаты касательной плоскости обозначены  $x, y, z$  в отличие от текущих координат  $x, y, z$  поверхности  $z = f(x, y)$ ).

**Теорема.** Если функция  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $P_0(x_0, y_0)$ , то график  $z = f(x, y)$  этой функции обладает в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$ , касательной плоскостью, которая задается уравнением

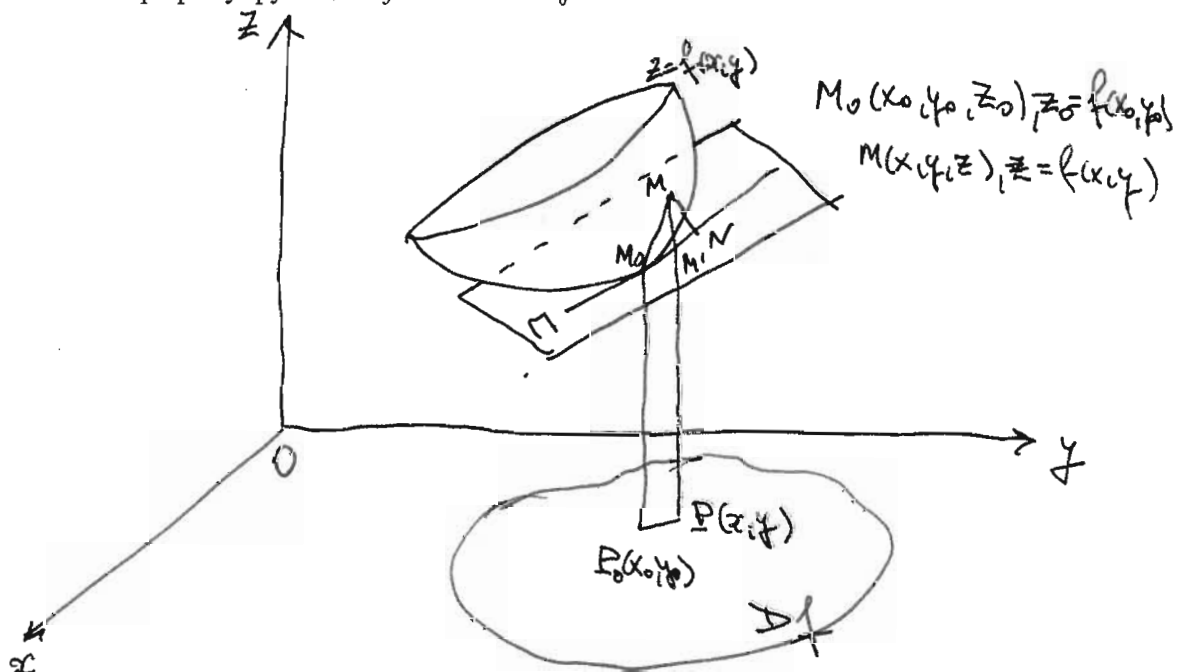
$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(y - y_0), \quad (3.2)$$

так что значение дифференциала функции  $f$  в точке  $P_0$  при приращениях  $x - x_0$ ,  $y - y_0$  аргументов равно приращению  $Z - z_0$  аппликаты точки касательной плоскости (текущие координаты касательной плоскости обозначены  $x, y, Z$  в отличие от текущих координат  $x, y, z$  поверхности  $z = f(x, y)$ ).

▼ Пусть  $P(x, y) \in D_f$  и  $\rho = |P_0P| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . В силу дифференцируемости функции  $f$  в точке  $P_0$ ,

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(y - y_0) + \alpha(x, y) \cdot \rho, \quad (3.3)$$

где  $\alpha(x, y) \rightarrow 0$  при  $P \rightarrow P_0$ ; т.е., при  $\rho \rightarrow 0$ . С другой стороны, уравнение (3.2) есть уравнение плоскости – обозначим ее  $\Pi$ , – проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Вычитая (3.2) из (3.3), получаем  $z - Z = \alpha \cdot \rho$ . Пусть  $N$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M(x, y, f(x, y))$  графика на плоскость  $\Pi$ , и  $M'$  – точка этой плоскости, имеющая те же абсциссу  $x$  и ординату  $y$ , что и  $M$  (и значит, аппликату  $Z$ ) (см. рис. 2.3). Так как  $NM \leq |M'M|$  и  $M_0M \geq P_0P$ , то  $0 \leq \frac{NM}{M_0M} \leq \frac{|M'M|}{P_0P} = \frac{|z - Z|}{\rho} = |\alpha|$ . Следовательно,  $\frac{NM}{M_0M} \rightarrow 0$  при  $P \rightarrow P_0$ ; т.е.,  $\Pi$  – касательная плоскость к графику функции  $f$  в точке  $M_0$ . ▲



## §4. Частичные производные высших порядков.

### 4.1. Основные определения и обозначения.

Рассмотрим функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ , определенную на непустом открытом множестве  $D_f$  пространства  $\mathbb{R}^m$ , и предположим, что её частичная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \varphi_i(x)$  по аргументу  $x_i, 1 \leq i \leq m$ , определена на некотором непустом открытом множестве  $G \subset D_f$ . Если в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in G$  существует  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)$  по аргументу  $x_j, 1 \leq j \leq m$ , то её называют частичной производной второго порядка функции  $f$  по переменным  $x_i$  и  $x_j$  и обозначают  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f''_{x_i x_j}(x)$ , так что  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ .

Аналогично определяются частичные производные функции  $f$  любого порядка  $n \in \mathbb{N}$ . Например,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \dots \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right)}_{k \text{ раз}},$$

или

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_i^{k_1} \partial x_j^{k_2}} = \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_j^{k_2}} \left( \frac{\partial^{k_1} f}{\partial x_i^{k_1}} \right), \quad k_1 + k_2 = n,$$

или

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \dots \partial x_{i_s}^{k_s}} \quad \text{где } 1 \leq i_1 \leq m, 1 \leq j \leq s, \text{ и } k_1 + k_2 + \dots + k_s = n.$$

Частичные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  называются смешанными, и они, вообще говоря, различные (но очень часто совпадают). Например, если  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$ , то

$$f'_{x_1}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^3}, \quad f'_{y_1}(x, y) = \frac{3y^2}{x^2 + y^3}$$

$$f''_{xy}(x, y) = -\frac{2x}{(x^2 + y^3)^2} \cdot 3y^2, \quad f''_{yx} = -\frac{3y^2}{(x^2 + y^3)^2} \cdot 2x,$$

так что  $f''_{xy} = f''_{yx}$ .

### 4.2. Достаточное условие совпадения смешанных производных.

Теорема (Шварца). Если функция  $f(x, y)$  имеет в окрестности  $U$  точки  $(a, b)$  частичные производные  $f'_x, f'_y$  и  $f''_{xy}$ , причем  $f''_{xy}$  непрерывна в точке  $(a, b)$ , то существует  $f''_{yx}(a, b)$  и справедливо равенство  $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$ .

(3)  
 4 Рассмотрим такое  $\eta > 0$ , чтобы  $U \supset Q((a,b);\eta)$ . Фиксируем  $k$ ,  $|k| < \eta$ , рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b) \quad (1)$$

с областью определения  $D_\varphi = (a-\eta, a+\eta)$ . Из существования  $f'_x$  в  $Q((a,b);\eta)$  следует, что  $\varphi$  дифференцируема и  $\varphi'(x) = f'_x(x, b+k) - f'_x(x, b)$ . По теореме Лагранжа о конечных приращениях,

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h \varphi'(a + \theta_1 h) = h [f'_x(a + \theta_1 h, b+k) - f'_x(a + \theta_1 h, b)] \quad (2)$$

для всех  $h, k$ ,  $|h| < \eta$ ,  $|k| < \eta$  и некоторого  $\theta_1$ ,  $0 < \theta_1 < 1$ .

Из существования второй производной  $f''_{xy}$  в  $Q((a,b);\eta)$  следует, что к разности, стоящей в правой части формулы (2), опять применима теорема Лагранжа, по которой

$$f'_x(a + \theta_1 h, b+k) - f'_x(a + \theta_1 h, b) = k \cdot f''_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k), \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Подставив

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h k f''_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k). \quad (3)$$

Рассмотрим теперь произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Так как, по условию,  $f''_{xy}$  непрерывна в точке  $(a,b)$ , то найдётся такое число  $\delta$ ,  $0 < \delta < \eta$ , что  $f''_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) = f''_{xy}(a, b) + \alpha(h, k)$  и  $|\alpha(h, k)| < \frac{\varepsilon}{2}$  для всех  $|h| < \delta$ ,  $|k| < \delta$ . Следовательно, на основании (3), имеем оценку

$$\left| \frac{1}{k} \left[ \frac{\varphi(a+h)}{k} - \frac{\varphi(a)}{k} \right] - f''_{xy}(a, b) \right| = |\alpha(h, k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4)$$

справедливу для всех  $0 < |h| < \delta$ ,  $0 < |k| < \delta$ .

Из условия существования  $f'_y$  в  $Q((a,b);\eta)$  и её определения, на основании (1) заключаем, что

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(a)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = f'_y(a, b)$$

и аналогично,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+h)}{k} = f'_y(a+h, b).$$

Переходя теперь в неравенстве (4) к пределу при  $k \rightarrow 0$ , получим оценку

$$\left| \frac{f'_y(a+h, b) - f'_y(a, b)}{h} - f''_{xy}(a, b) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

справедливу для всех  $h$ ,  $0 < |h| < \delta$ . Последнее означает, что существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(a+h, b) - f'_y(a, b)}{h} = f''_{yx}(a, b). \quad (5)$$

Но левая часть в (5) есть определение производной  $f''_{yx}(a, b)$ , и следовательно,  $f''_{yx}(a, b) = f''_{xy}(a, b)$ .  $\Delta$

(4)

Замечание 1. Утверждение теоремы о равенстве смешанных производных сохраняется, если её условием вместо  $f_{xy}$  удовлетворяет  $f''_{yx}$ . Доказательство следует вести для функции  $\varphi(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$ .

Замечание 2. Функцию  $f(x, y)$  относят к классу  $C^2$  на открытом множестве  $G \subset \mathbb{R}^2$ , если все её частные производные второго порядка непрерывны на  $G$ . Согласно теореме Шварца, и замечанию 1, смешанные производные функции  $f(x, y)$  совпадают во всех точках множества  $G$ .

Это замечание распространяется на функции произвольного числа переменных.

#### 4.3. Функции класса $C^n$ .

Определение 1. Функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  называют принадлежащей классу  $C^n$ ,  $n \geq 1$ , на открытом множестве  $G \subset D_f$  из  $\mathbb{R}^m$ , если все её частные производные  $n$ -го порядка (а следовательно, и все частные производные низших порядков) непрерывны на  $G$ .

Теорема. Если функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  принадлежит классу  $C^n$ ,  $n \geq 1$ , в своей области определения  $D_f$  и  $D_f$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^m$ , то для любого  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , у каждой частной производной  $k$ -порядка любые входящие в неё дифференцирования по различным аргументам перестановочны.

### § 5. Дифференциалы высших порядков. Правило Лейбнера.

#### 5.1. Дифференциалы высших порядков.

Пусть функция  $f(x, y)$  принадлежит классу  $C^n$ ,  $n \geq 1$ , в своей области определения  $D_f$  и  $D_f$  — открытое множество (в  $\mathbb{R}^2$ ). Тогда  $f$  принадлежит также  $C^1$  в  $D_f$ , и следовательно, согласно результату § 3, функция  $f(x, y)$  дифференцируема в каждой точке  $(x, y) \in D_f$ . Её дифференциал  $df(x, y)$  в точке  $(x, y) \in D_f$  имеет вид

$$df(x, y)(h, k) = \partial_1 f(x, y) \cdot h + \partial_2 f(x, y) \cdot k, \quad \partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

где  $h$  и  $k$  принимают произвольные значения независимо друг от друга, т.е.,  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ . Фиксируя  $h$  и  $k$ , можно рассматривать  $d$  как операцию  $h \cdot \partial_1 + k \cdot \partial_2$  над  $f$ , состоящую в применении дифференцирования  $\partial_1$  и  $\partial_2$ , умножения полученных частных производных соответственно на  $h$  и  $k$  и сложения этих произведений. При этом, операция  $d = h \cdot \partial_1 + k \cdot \partial_2$  линейна, т.е., обладает свойствами  $d(f+g) = df + dg$  и  $d(\lambda f) = \lambda df$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Функции  $\partial_1 f$  и  $\partial_2 f$  в свою очередь принадлежат классу  $C^1$  в  $D_f$ , и следовательно, операцию  $d = h \cdot \partial_1 + k \cdot \partial_2$  можно повторить, образовав  $d^2 f = d(df)$ .

$$d^2 f = (h \partial_1 + k \partial_2)^2 f = (h \partial_1 + k \partial_2)(h \partial_1 f + k \partial_2 f) = \\ = h^2 \partial_1^2 f + h k \partial_1 \partial_2 f + h k \partial_2 \partial_1 f + k^2 \partial_2^2 f.$$

По теореме Иварса, дифференцирование  $\partial_1$  и  $\partial_2$  перестановочны, так что (в более обычных обозначениях) получаем

$$d^2 f(x, y)(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) h^2 + 2 h k \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y). \quad (1)$$

Квадратичную форму (1) от  $h$  и  $k$  (точка  $(x, y)$  фиксирована) называют дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) функции  $f$  в точке  $(x, y)$ .

Дифференциалом  $n$ -го порядка называют  $n$ -ую форму.

$$d^n f(x, y)(h, k) = (h \partial_1 + k \partial_2)^n f(x, y). \quad (2)$$

При этом

$$(h \partial_1 + k \partial_2)^n f(x, y) = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i}(x, y) h^{n-i} k^i, \quad (3)$$

где  $C_n^i$  — биномиальные коэффициенты. Формула (3) действительно имеет место, поскольку операции  $\partial_1$  и  $\partial_2$  линейны и перестановочны и совершенно так же, как если бы  $\partial_1$  и  $\partial_2$  были числами, доказываемся, что

$$(h \partial_1 + k \partial_2)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \partial_1^{n-i} \partial_2^i h^{n-i} k^i.$$

Понятие дифференциалов высших порядков распространяется на функции любого числа переменных

$$d^n f(x_1, \dots, x_m)(h_1, \dots, h_m) = d^n f(x)(h) = (h_1 \partial_1 + \dots + h_m \partial_m)^n f(x). \quad (4)$$

## 5.2. Формула Тейлора.

Лемма. Если функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  принадлежит классу  $C^k$  в открытом шаре  $U \subset D_f$  с центром в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f$  то для любого  $h = (h_1, \dots, h_m)$ , для которого  $(x+h) \in U$ , функция  $\varphi(t) = f(x+th)$  действительного переменного  $t$  имеет на отрезке  $[0, 1]$  производную  $\varphi^{(k)}(t)$  и

$$\varphi^{(k)}(t) = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(x+th) = d^k f(x+th), \quad t \in [0, 1]. \quad (5)$$

Рассмотрим случай  $m=2$ . Согласно формулам раскрытия производных сложной функции,

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} f(x_1+th_1, x_2+th_2) = f'_{x_1}(x_1+th_1, x_2+th_2) \frac{d}{dt}(x_1+th_1) + \\ + f'_{x_2}(x_1+th_1, x_2+th_2) \frac{d}{dt}(x_2+th_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x+th) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x+th) h_2 = \\ = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f(x+th) = d f(x+th),$$

где использована такая же формула (4) при  $n=1$ .

Аналогично,

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+th_1, x_2+th_2) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+th_1, x_2+th_2) \cdot h_2 \right] = \\ &= h_1 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1+th_1, x_2+th_2) \cdot h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1+th_1, x_2+th_2) \cdot h_2 \right] + \\ &+ h_2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1+th_1, x_2+th_2) \cdot h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1+th_1, x_2+th_2) \cdot h_2 \right] = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x+th) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x+th) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x+th) h_2^2 = \\ &= (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^2 f(x+th) = d^2 f(x+th),\end{aligned}$$

где использованы свойства перестановочности двух дифференцирований и формула (4) при  $n=2$ .

Указанная процедура нахождения производных  $\varphi'(t)$  и  $\varphi''(t)$  показывает, что проведя её  $k$  раз, мы придём к формуле (5) в случае  $m=2$ . Остатки суровой размаиваются аналогично.  $\triangleright$

Теорема (формула Тейлора). Если функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  принадлежит классу  $C^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , в некотором открытом шаре  $U \subset D_f$  с центром в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f$ , то для любого  $h = (h_1, \dots, h_m)$  тако что  $(x+h) \in U$ , справедливо представление

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x) &= f(x_1+h_1, \dots, x_m+h_m) - f(x_1, \dots, x_m) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m})^k f(x) + \frac{1}{(n+1)!} (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m})^{n+1} f(x+\theta h) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(x) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.\end{aligned}\quad (6)$$

$\triangleleft$  Рассмотрим функцию  $\varphi(t) = f(x+th)$ ,  $t \in [0, 1]$ , которая, согласно лемме, обладает на  $[0, 1]$  производными до порядка  $(n+1)$  включительно. Поэтому, согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, разложение

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) t^k + \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(\theta t) t^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (7)$$

справедливо для всех  $t \in [0, 1]$ . Теперь, формула (6) непосредственно следует из формулы (7) и (5), так как  $\varphi(1) = f(x+h)$ ,  $\varphi(0) = f(x)$ ,  $\varphi^{(k)}(0) = d^k f(x)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , и  $\varphi^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(x+\theta h)$ .  $\triangleright$

## § 6. Теорема Ферма. Экстремумы.

### 6.1. Теорема Ферма.

Эта теорема, доказанная в пункте 2.1.1, для функций из  $\mathbb{R}$  распространяется на функции из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$  при любом  $m \in \mathbb{N}$ .

Теорема 1 (теорема Ферма). Если функция  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$  принимает во внутренней точке  $x_0$  множества  $E \subset D_f$  наибольшее или наименьшее на  $E$  значение и  $f$  дифференцируема в этой точке, то  $df(x_0) = 0$ ; т.е., все частные производные первого порядка функции  $f$  в точке  $x_0$  обращаются в нуль.

Пусть, например,  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$  — точка наименьшего значения. Тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что шар  $U(x_0; \varepsilon) \subset E$  и  $f(x) \geq f(x_0)$  для всех  $x \in U(x_0; \varepsilon)$ . Рассмотрим  $k$ -ю частную функцию

$$\varphi_k(z) = f(x_{10}, \dots, x_{k-1,0}, z, x_{k+1,0}, \dots, x_{m0}).$$

Согласно пункту 2.1.1, она дифференцируема в точке  $x_{k0}$  и  $\varphi'_k(x_{k0}) = (\partial_k f)(x_0)$ . Кроме того,  $\varphi_k(z) \geq \varphi_k(x_{k0})$  для всех  $z \in (x_{k0} - \varepsilon, x_{k0} + \varepsilon)$ . Поэтому <sup>одномерной</sup> по теореме Ферма  $\varphi'_k(x_{k0}) = 0$ . Таким образом,  $(\partial_k f)(x_0) = 0$  для всех  $k, 1 \leq k \leq m$ , и значит,  $df(x_0) = 0$ .

Определение 1. Точку  $x$ , в которой функция  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$  дифференцируема и  $df(x) = 0$ , называют стационарной точкой функции  $f$ .

Итак, для того чтобы во внутренней точке  $x$  множества  $E \subset D_f$  функция  $f$  принимала наибольшее или наименьшее на  $E$  значение, необходимо (если  $f$  дифференцируема в точке  $x$ ), чтобы  $x$  была стационарной точкой этой функции. Однако, это условие, вообще, недостаточно. Например,  $(0, 0)$  — стационарная точка функции  $f(x, y) = xy$ , но она не является ни точкой наибольшего, ни точкой наименьшего значения этой функции ни в какой своей окрестности. Действительно, в любой окрестности точки  $(0, 0)$  существуют точки  $(x, y)$ , в которых  $f(x, y) > f(0, 0) = 0$ , а именно, внутренние точки первого и третьего квадратов, и точки, где  $f(x, y) < f(0, 0) = 0$ , — внутренние точки второго и четвертого квадратов (рис. ).



6.2. Точки экстремума.

Определение 2. Пусть  $f$  - функция из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}$ . Точку  $x_0$  называют её точной максимума, соответственно, минимума, а  $f(x_0)$  - максимум, соответственно, минимум, если  $x_0$  обладает такой окрестностью  $U \subset D_f$ , что  $f(x_0) \geq f(x)$ , соответственно,  $f(x_0) \leq f(x)$  для всех точек  $x \in U$ . Если при этом  $f(x_0) > f(x)$ , соответственно,  $f(x_0) < f(x)$  для всех  $x \in U$ , отличных от  $x_0$ , то  $x_0$  называют точной строгой максимума, соответственно, строгой минимума. Точные максимума и точные минимумы функции называют точками её экстремума.

Из теоремы 1 непосредственно следует, что для того, чтобы точка  $x$  в каждой функции  $f$  дифференцируема, была точной экстремум этой функции, необходимо, чтобы  $x$  была стационарной точкой, т.е. чтобы  $df(x) = 0$ . Мы видели также, что одного выполнения этого условия ещё не достаточно. Таким образом, нужны признаки, позволяющие узнать, когда данная стационарная точка есть точка экстремума и какого именно: максимума или минимума.

Пусть функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  принадлежит классу  $C^2$  в своей области определения  $D_f$  и  $D_f$  - открытое множество в  $\mathbb{R}^m$ . Предположим, что  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f$  - стационарная точка функции  $f$ , так что  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, 1 \leq i \leq m$ . Рассмотрим открытый шар  $U(x; r) \subset D_f, r > 0$ . Согласно формуле Тейлора, для любого  $h = (h_1, \dots, h_m)$ , для которого  $(x+h) \in U(x; r)$ , справедливо представление

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1+h_1, \dots, x_m+h_m) - f(x_1, \dots, x_m) = \\ &= \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)h_m \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left( h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + h_m \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \right) f(x+\theta h) = \\ &= \frac{1}{2} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 f(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Так как  $f \in C^2$  в  $U(x; r)$ , то все функции  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  непрерывны в  $U(x; r), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$ , и поэтому

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\theta h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \alpha_{ij}(h), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m,$$

где  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_{ij}(h) = 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 f(x+\theta h) &= \frac{1}{2} \left( h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + h_m \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \right) f(x) + \\ &+ \frac{1}{2} (h_1 \beta_1(h) + \dots + \alpha_m \beta_m(h))^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где каждая функция  $\beta_1(h), \dots, \beta_m(h)$  однозначно определяется через функции  $\alpha_{ij}(h)$  и  $\lim_{h \rightarrow 0} \beta_k(h) = 0, 1 \leq k \leq m$ . Обозначим  $\beta(h) = (\beta_1(h), \dots, \beta_m(h))$ .

Используя неравенство Коши и замечая, что  $\|\beta(h)\|_m \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , получим оценки

$$|h_1 \beta_1(h) + \dots + h_m \beta_m(h)|^2 \leq \sum_{k=1}^m h_k^2 \cdot \sum_{k=1}^m \beta_k^2(h) = \|h\|_m^2 \cdot \|\beta(h)\|_m^2 = o(\|h\|_m^2), \quad h \rightarrow 0. \tag{3}$$

Объединив (1) - (3), заключаем, что

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} \left( h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 f(x) + o(\|h\|_m^2), \quad h \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \left( h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j \quad (5)$$

- квадратичная форма относительно  $h_i$  и  $h_j$ ;  $x \in D(f)$  - фиксирована.

Из формулы (4) и (5) следует, что

$$\operatorname{sgn} [f(x+h) - f(x)] = \operatorname{sgn} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j \quad (6)$$

Поэтому, на основании (6), если квадратичная форма (5) положительно определенная, то функции  $f$  имеет в точке  $x \in Df$  строгой минимум; если квадратичная форма (5) отрицательно определенная, то функции  $f$  имеет в точке  $x \in Df$  строгой максимум; если же квадратичная форма (5) знакоопределенная, то функции  $f$  не имеет в точке  $x \in Df$  локального экстремума.

Свойство знакоопределенности квадратичной формы (5) проверяется посредством известного из курса линейной алгебры критерия Сильвестера.

## §7. Дифференцируемые отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ .

### 7.1. Равномерная непрерывность линейных отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ .

Определение 1. Отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $m \geq 1, n \geq 1$ , назовем равномерно непрерывным на множестве  $E \subset Df \subset \mathbb{R}^m$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta > 0$ , выходящее только от  $\varepsilon > 0$ , что для любых точек  $x', x'' \in E$ , связанных условием  $d_m(x', x'') < \delta$  справедливо утверждение  $d_n(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ .

Напомним, что здесь  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , и  $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ ,  $x'' = (x''_1, \dots, x''_m)$ .

Теорема 1. Равномерно непрерывное на множестве  $E$  отображение  $f$  непрерывно в каждой точке множества  $E$  (непрерывно на  $E$ ).

Рассмотрим произвольную точку  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m}) \in E$  и произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Согласно определению 1, существует число  $\delta > 0$ , что  $d_n(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  для всех  $x \in E$ , у которых  $d_m(x, x_0) < \delta$ . Последнее означает, что отображение  $f$  непрерывно в (любой) точке  $x_0 \in E$ .

Свойство равномерной непрерывности функции (отображения) значительно сильнее свойства простой непрерывности функции (отображения) в точке. Это утверждение иллюстрирует и доказательство предыдущей теоремы 1: число  $\delta > 0$ , зависящее в определении свойства непрерывности функции (отображения) в точке множества  $E$  одно и то же для всех точек из  $E$ . Кроме того не трудно привести примеры непрерывных во всех точках множества  $E$  функций (отображений), не являющихся, однако, равномерно непрерывными на  $E$ .

С другой стороны, укажем полезный пример равномерно непрерывного отображения из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Напомним (см. курс линейной алгебры), что линейное отображение  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D_L = \mathbb{R}^m$ , задается числовой матрицей  $A = (a_{ij})$  размера  $m \times n$  ( $m$ -столбцов,  $n$ -строк):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

Если  $y = L(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , то  $y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{im}x_m = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j$ ,  $1 \leq i \leq n$ , или, в матричной записи,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Теорема 2. Любое линейное отображение  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  равномерно непрерывно на  $\mathbb{R}^m = D_L$ .

Рассмотрим произвольные точки  $x', x'' \in \mathbb{R}^m$ ,  $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ ,  $x'' = (x''_1, \dots, x''_m)$  и пусть  $y' = L(x')$ ,  $y'' = L(x'')$ ,  $y' = (y'_1, \dots, y'_n)$ ,  $y'' = (y''_1, \dots, y''_n)$ . Тогда  $x' - x'' = (x'_1 - x''_1, \dots, x'_m - x''_m)$ ,  $y' - y'' = (y'_1 - y''_1, \dots, y'_n - y''_n)$ , и согласно (1),  $y'_i - y''_i = a_{i1}(x'_1 - x''_1) + a_{i2}(x'_2 - x''_2) + \dots + a_{im}(x'_m - x''_m)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Обозначим  $\alpha = \max |a_{ij}| > 0$ . Тогда  $|x'_j - x''_j| \leq d_m(x', x'')$ ,  $1 \leq j \leq m$ , и  $|y'_i - y''_i| \leq \alpha m d_m(x', x'')$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Поэтому  $d_n(y', y'') = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i|^2} \leq \alpha m \sqrt{n} d_m(x', x'')$ .

Для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  положим  $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha m \sqrt{n}} > 0$ . Тогда, для всех  $x', x'' \in \mathbb{R}^m$ , для которых  $d_m(x', x'') < \delta$ , справедливо неравенство  $d_n(y', y'') < \alpha m \sqrt{n} \delta = \varepsilon$ , так что отображение  $y = L(x)$  равномерно непрерывно на  $\mathbb{R}^m$ .

## 7.2. Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим произвольное отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  аддитивно определенное  $Df$  которого существует открытое множество в  $\mathbb{R}^m$  и  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_m)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m) \in Df = Df_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Для фиксированной точки  $x = (x_1, \dots, x_m) \in Df$  и вектора  $h = (h_1, \dots, h_m)$ , такого что  $x+h = (x_1+h_1, \dots, x_m+h_m) \in Df$ , отображение  $f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x))$ ,  $f_i(x+h) - f_i(x) = f_i(x_1+h_1, \dots, x_m+h_m) - f_i(x_1, \dots, x_m)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , назовем приращением отображения  $f$ , соответствующим приращению  $h$  аргумента  $x$ .

Определение 2. Отображение  $f$  назовем дифференцируемым в точке  $x \in Df$ , если существует линейное отображение  $L(x; h): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $x$ -фиксировано,  $h$ -переменно) и отображение  $\alpha(x; h): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $x$ -фиксировано,  $h$ -переменно), что для любого  $h = (h_1, \dots, h_m)$ , для которого  $x+h \in Df$ , справедливо представление

$$f(x+h) - f(x) = L(x; h) + \alpha(x; h) \quad (2)$$

и при этом  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x; h)\|_n}{\|h\|_m} = 0$ .

Здесь  $\alpha(x; h) = (\alpha_1(x; h), \dots, \alpha_n(x; h))$ ,  $\alpha_i(x; h) = \alpha_i(x_1, \dots, x_m; h_1, \dots, h_m)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и  $\|\alpha(x; h)\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i(x; h)|^2}$ ,  $\|h\|_m = \sqrt{\sum_{j=1}^m h_j^2}$ .

Свойство  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x; h)\|_n}{\|h\|_m} = 0$  можно записывать в виде

$\alpha(x; h) = o(h), h \rightarrow 0$ , поскольку  $|\alpha_i(x; h)| \leq \|\alpha(x; h)\|_n, 1 \leq i \leq n$ , и следовательно,  
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_i(x; h)}{\|h\|_m} = 0, 1 \leq i \leq n$ , а последнее свойство мы записывали в виде  
 $\alpha_i(x; h) = o(h), h \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n$ .

Линейное отображение  $L(x; h)$  задаётся матрицей  $A(x)$ ,

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nm}(x) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

в которой  $a_{ij}(x) = a_{ij}(x_1, \dots, x_m), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ , — функции переменных  $x_1, \dots, x_m$ .  
 В матричной форме свойство (2) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} f_1(x+h) - f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x+h) - f_n(x) \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(x; h) \\ \vdots \\ \alpha_n(x; h) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

### 4.3. Матрица Якоби.

Пусть отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  дифференцируемо в точке  $x \in D_f$ , так что справедливо представление (4). Поэтому для каждого  $i, 1 \leq i \leq n$ , имеем представление

$$f_i(x+h) - f_i(x) = a_{i1}(x)h_1 + a_{i2}(x)h_2 + \dots + a_{im}(x)h_m + \alpha_i(x; h), \quad (5)$$

в котором  $\alpha_i(x; h) = o(h), h \rightarrow 0$ . Формула (5) показывает, что каждая функция  $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_m), 1 \leq i \leq n$ , дифференцируема в точке  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D_f$ , и следовательно,  $a_{i1}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x), a_{i2}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x), \dots, a_{im}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(x), 1 \leq i \leq n$ .

Таким образом, матрица  $A(x)$  принимает вид матрицы

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

называемой матрицей Якоби дифференцируемого отображения  $f$  в точке  $x \in D_f$ .  
 В частности, генерально это представление (2) для дифференцируемого отображения эквивалентно

Если  $m=1, n \geq 1$ , и  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), t \in (\alpha, \beta)$ , — дифференцируемая векторная функция, то матрица (3) в определении (2) и (4) состоит из одного первого столбца, а равенство (5) принимает вид

$$f_i(t+h) - f_i(t) = a_{i1}(t)h + \alpha_i(t; h); \quad t, t+h \in (\alpha, \beta), 1 \leq i \leq n,$$

и  $\alpha_i(t; h) = o(h), h \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n$ . Поэтому

$$a_{i1}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(t+h) - f_i(t)}{h} = \frac{df_i}{dt}(t) = f'_i(t), 1 \leq i \leq n.$$

Применяя первый столбец матрицы Якоби (6) для дифференцируемой векторной функции  $f(t)$  записывать в виде строки  $(f'_1(t), \dots, f'_n(t))$ , которую называют производной векторной функции  $f(t)$  и обозначают  $f'(t)$ . Таким образом

$$f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t)). \quad (4').$$

#### 7.4. Непрерывность дифференцируемого отображения.

Теорема 3. Всякое дифференцируемое отображение из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  непрерывно.

△ Если отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  дифференцируемо в точке  $x \in Df$ , то справедливо представление (2), в котором  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(x, h) = 0$ . Согласно теоремам 1 и 2, линейное отображение  $L(x, h)$  непрерывно в точке  $h = 0$ , так что  $\lim_{h \rightarrow 0} L(x, h) = L(x, 0) = 0$ . Поэтому,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] = 0 \text{ и } \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x); \text{ т.е. } f \text{ непрерывно в точке } x \in Df.$$

#### 7.5. Критерий дифференцируемости отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ .

Теорема 4. Отображение  $f$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  дифференцируемо в точке  $x \in Df$  тогда и только тогда, когда каждая его компонентная  $f_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , — дифференцируемая функция в точке  $x \in Df = Df_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

△ Необходимость условия теоремы 4 проверена в пункте 7.3.

Достаточность. То условие, что для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , справедливо представление (5), в котором  $\alpha_i(x, h) = o(h)$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ; т.е.,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\alpha_i(x, h)|}{\|h\|_m} = 0. \text{ Следовательно, справедливы формулы (4) и (2), в}$$

которых линейное отображение  $L(x, h)$  задается матрицей Якоби (6). При этом, отображение  $\alpha(x, h)$  с компонентами  $\alpha(x, h) = (\alpha_1(x, h), \dots, \alpha_n(x, h))$  удовлетворяет оценке  $\|\alpha(x, h)\|_n \leq \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i(x, h)|$  и поэтому,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, h)\|_n}{\|h\|_m} = 0$ . Таким образом, установлена справедливость определения 2 и отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $x \in Df$ . ▸

### §8. Неявная функция.

#### 8.1. Неявные функции, задаваемые одним уравнением.

Теорема (Юнг). Пусть  $F(u, x, y, \dots, z)$  — непрерывная функция переменных  $u, x, y, \dots, z$  на открытом множестве  $D_F$ . Допустим, что в точке  $M_0(u_0, a, b, \dots, c) \in D_F$  функция  $F$ : 1) обращается в нуль; 2) дифференцируема; 3) производная  $F'_u$  отлична от нуля. Тогда существует по крайней мере одна функция  $u = \varphi(x, y, \dots, z)$ , которая дифференцируема в точке  $(a, b, \dots, c)$ , принимает в ней значение  $u_0$  и в окрестности этой точки обращает уравнение  $F(u, x, y, \dots, z) = 0$  в тождество (т.е.,  $F(\varphi(x, y, \dots, z), x, y, \dots, z) \equiv 0$  для всех

точке  $(x, y, \dots, z)$  в этой окрестности точки  $(a, b, \dots, c)$ . Если, дополни-  
тельно, производная  $F'_u$  существует и не обращается в нуль не только  
в точке  $(u_0, a, b, \dots, c)$ , но и в некоторой её окрестности, то указанная  
выше функция  $u = \varphi(x, y, \dots, z)$  единственная.

Δ Ограничимся рассмотрением случая трёх переменных  $u, x, y$ .  
Так как  $F(u_0, a, b) = 0$  и  $F'_u(u_0, a, b) \neq 0$ , то можно сначала найти  
настолько малое число  $\varepsilon > 0$ , чтобы числа

$$F(u_0 - \varepsilon, a, b) \text{ и } F(u_0 + \varepsilon, a, b) \quad (1)$$

имели противоположные знаки. Это можно сделать, поскольку

$$F'_u(u_0, a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + h, a, b) - F(u_0, a, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + h, a, b)}{h} \neq 0$$

а дробь  $\frac{F(u_0 + h, a, b)}{h}$  сохраняет постоянный знак (знак числа  
 $F'_u(u_0, a, b)$ ) на некотором интервале  $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$ , в это время, как  
 $h$  меняет знак при переходе через нуль. Затем, поскольку  $F$   
непрерывна, можно указать настолько малое число  $\delta > 0$ , чтобы  
функции

$$F(u_0 - \varepsilon, x, y) \text{ и } F(u_0 + \varepsilon, x, y) \quad (2)$$

сохраняли, следовательно, знаки чисел (1) для всех точек  $(x, y)$ , у которых

$|x-a|<\delta, |y-b|<\delta$ ; т.е., для всех точек  $(x,y)$  из некоторой окрестности  $U$  точки  $(a,b)$  ( $\in \mathbb{R}^2$ ).

Рассмотрим произвольную точку  $(x,y) \in U$ . Так как  $F(u,x,y)$  непрерывна по  $u$  и, согласно (2) имеет противоположные знаки в концевых точках интервала  $(u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon)$ , то существует  $u \in (u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon)$ , в которой  $F(u,x,y)=0$ . Пусть  $u=\varphi(x,y)$  — корень уравнения  $F(u,x,y)=0$  (наибольший, если их несколько). Тогда на множестве  $U: |x-a|<\delta, |y-b|<\delta$  найдем функцию  $u=\varphi(x,y)$ , для которой, в силу (1),  $\varphi(a,b)=u_0$  и  $F(\varphi(x,y), x, y) \equiv 0$  для всех  $(x,y) \in U: |x-a|<\delta, |y-b|<\delta$ .

Рассмотрим теперь такие приращения  $\Delta x, \Delta y$  аргументов  $x, y$  в точке  $(a,b)$ , чтобы  $|\Delta x|<\delta, |\Delta y|<\delta$ , так что  $F(u_0+\Delta u, a+\Delta x, b+\Delta y)=0$  и  $\Delta F = F(u_0+\Delta u, a+\Delta x, b+\Delta y) - F(u_0, a, b) = 0$ . Так как  $F$  дифференцируема в точке  $(u_0, a, b)$ , то

$$0 = \Delta F = F'_u(u_0, a, b) \Delta u + F'_x(u_0, a, b) \Delta x + F'_y(u_0, a, b) \Delta y + \alpha_1 \Delta u + \alpha_2 \Delta x + \alpha_3 \Delta y,$$

где  $\alpha_i \rightarrow 0, i=1,2,3$ , при  $(\Delta u, \Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0,0)$ .

Считаем  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  выбранными настолько малыми, чтобы  $|\alpha_1| < \frac{1}{2} |F'_u(u_0, a, b)|$  ( $|F'_u(u_0, a, b)| > 0$ ) для всех  $|\Delta x|<\delta, |\Delta y|<\delta, |\Delta u|<\varepsilon$ . Тогда

$$\Delta u = - \frac{F'_x(u_0, a, b)}{F'_u(u_0, a, b) + \alpha_1} \Delta x - \frac{F'_y(u_0, a, b)}{F'_u(u_0, a, b) + \alpha_1} \Delta y - \frac{\alpha_2}{F'_u(u_0, a, b) + \alpha_1} \Delta x - \frac{\alpha_3}{F'_u(u_0, a, b) + \alpha_1} \Delta y. \quad (3)$$

Так как  $\frac{1}{1+w} = 1 - w + o(w), w \rightarrow 0$ , то

$$\frac{1}{F'_u(u_0, a, b) + \alpha_1} = \frac{1}{F'_u(u_0, a, b)} \left[ 1 + \frac{\alpha_1}{F'_u(u_0, a, b)} \right] =$$

$$= \frac{1}{F'_u(u_0, a, b)} \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{F'_u(u_0, a, b)} + o\left(\frac{\alpha_1}{F'_u(u_0, a, b)}\right) \right] = \frac{1}{F'_u(u_0, a, b)} [1 + \beta_1] \text{ и}$$

$\beta_1 \rightarrow 0$  при  $(\Delta u, \Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0,0)$ . Поэтому формула (3) принимает вид

$$\Delta u = - \frac{F'_x(u_0, a, b)}{F'_u(u_0, a, b)} \Delta x - \frac{F'_y(u_0, a, b)}{F'_u(u_0, a, b)} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

где  $\gamma_i \rightarrow 0, i=1,2$ , при  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$ , так что функции  $u=\varphi(x,y)$  дифференцируема в точке  $(a,b)$  и её частные производные в точке  $(a,b)$  равны

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{F'_x(u_0, a, b)}{F'_u(u_0, a, b)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{F'_y(u_0, a, b)}{F'_u(u_0, a, b)}. \quad \triangleright$$

Замечание 1. Если, дополнительно, функция (производная)  $F'_u$  существует и не обращается в нуль ни в какой-либо точке  $(a,b)$ , но и в некоторой её окрестности ( $\in \mathbb{R}^3$ ), то решение  $u=\varphi(x,y)$  уравнения  $F(u,x,y)=0$  единственное.

Если бы было два решения  $u$  и  $u^1$ , то с учётом теоремы Лагранжа о среднем значении, мы имели бы

$$0 = F(u,x,y) - F(u^1,x,y) = (u - u^1) F'_u(\underline{u}, x, y),$$

где  $\underline{u}$  — некоторое значение, среднее между  $u$  и  $u^1$  ( $u \neq u^1$ ), но тогда  $F'_u(\underline{u}, x, y) = 0$ , что противоречит допущению.  $\triangleright$

Замечание 2. Если, сверх того, функция  $F$  дифференцируема в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  ( $\in \mathbb{R}^3$ ), то и функция  $u = \varphi(x, y, z)$  дифференцируема в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ , так как предыдущее доказательство применимось к любой точке  $(x, y, z)$  из этой окрестности.

### 8.2. Производные и дифференциалы первого порядка.

Неявные функции определяются неразрешимыми уравнениями. В предыдущем пункте было показано, что дифференцируемые уравнения определяют дифференцируемые функции. После этого вычисление производных и дифференциалов неявных функций производится по единственному способу.

1°. Рассмотрим сначала неявную функцию  $u$  одной переменной  $x$ , определенную уравнением  $F(x, y) = 0$ . Тогда

$$0 = dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy,$$

откуда, заметая, что  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ , находим

$$dy = - \frac{F'_x}{F'_y} dx, \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y}.$$

2°. Пусть теперь  $u$  есть неявная функция независимых переменных  $x, y, \dots, z$ , определенная одним уравнением  $F(x, y, \dots, z, u) = 0$ . Тогда

$$0 = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du.$$

Отсюда находим полный дифференциал

$$du = - \frac{F'_x dx + F'_y dy + \dots + F'_z dz}{F'_u} \quad (4)$$

при условии, что  $F'_u \neq 0$ . Частные производные функции  $u$  суть коэффициенты при  $dx, dy, \dots, dz$  в выражении (4), и поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{F'_x}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{F'_y}{F'_u}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{F'_z}{F'_u}.$$

### 8.3. Неявные функции, задаваемые системами уравнений.