

В предшествующем § 2 сообщаются необходимые сведения из общей теории множеств, на базе которых строится всё дальнейшее изложение в настоящем учебном пособии.

§ 1. Действительные числа и числовая прямая. Абсолютная величина действительного числа.

1.1. Числовая прямая.

Действительные числа служат, прежде всего, для измерения величин. Простейшая геометрическая величина — это длина прямолинейного отрезка. Выбрав масштаб (т.е., отрезок, длину которого принимают равной единице), длину каждого отрезка можно выразить определённым положительным числом. В геометрии принимают, что, и обратно, каждое положительное число выражает длину некоторого отрезка. На этом основано геометрическое изображение действительных чисел с помощью точек координатной прямой (прямой с выбранным на ней масштабом OE): каждому положительному числу x ставят в соответствие точку пути x с началом O , проходящего через E , и считая от O на расстоянии x ; каждому отрицательному числу x ставят в соответствие точку прямой x расположенного пути прямой, считая от O на расстоянии $-x$, и числу 0 (нуль) ставят в соответствие точку O (рис. 1). Таким образом,

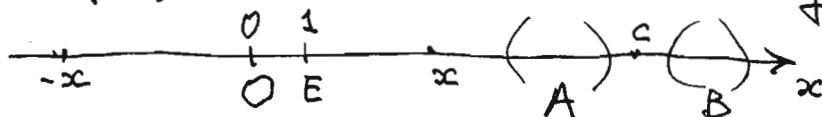


Рис. 1.

- 1) каждому числу соответствует однозначно определенная точка прямой;
- 2) различным числам соответствуют различные точки и
- 3) каждая точка прямой соответствует некоторому числу.

Руководствуясь этим ~~соответствием~~ соответствием на совокупность всех действительных чисел переносят и геометрически терминологию, называя совокупность всех действительных чисел числовой прямой (иногда, числовой осью), а действительные числа называют точками.

1.2. Абсолютная величина (модуль) действительного числа

Вне себя мы знали, что действительные числа можно линейно упорядочить, т.е., что утверждение " $a \leq b$ или $b \leq a$ " истинно для любых действительных чисел a и b . Поэтому для любых чисел a и b символом $\max(a, b)$ обозначим наибольшее, символом $\min(a, b)$ — наименьшее из этих чисел, если они

не равны, и общее значение, если они равны. Из этого определения сразу следует, что $\max(a, b) < c$ ($\leq c$) тогда и только тогда, когда одновременно $a < c$ и $b < c$ ($a \leq c$ и $b \leq c$), и аналогично (с изменением знаков всех неравенств на противоположные) для $\min(a, b)$ (проверьте самостоятельно).

Определение 1. Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x называют число $\max(x, -x)$ и обозначают $|x|$; $|x| = \max(x, -x)$.

Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

и значит, $|x| \geq 0$ для всех чисел x и $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. График функции $y = |x|$ изображен на рис. 2.

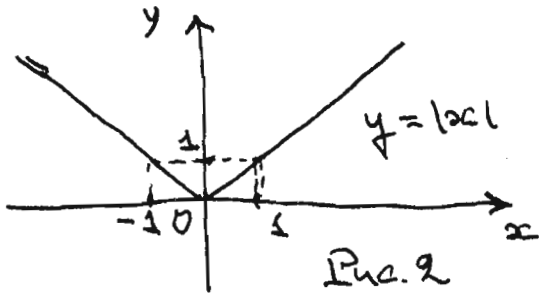


Рис. 2

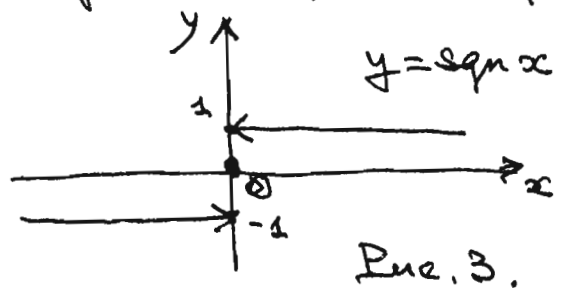


Рис. 3.

Сторону говоря, приемы $y = x$ и $y = -x$ графика функции $y = |x|$ должны быть снабжены стрелками в точке 0, поскольку $y = |x| = x$ только для $x \geq 0$ и $y = |x| = -x$ только для $x \leq 0$; но $y = |x| = 0$ для $x = 0$, и поэтому рисовать стрелки на графике функции $y = |x|$ не принято. Совсем другая картинка, например, для функции $y = \operatorname{sgn} x$ (читается: "изрек равен сигнум (signum) икс") определяемой посредством записи

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Стрелки на графике функции $y = \operatorname{sgn} x$ (см. рис. 3) означают, что значения -1 и 1 не принимаются ею в точке $x = 0$; её значение в точке $x = 0$, по определению, равно 0 (нулю).

Вернёмся, однако, к изучению свойств модуля действительного числа. Из формулы (1) следует, что

$$x = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \geq 0, \\ -|x|, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

и поэтому, $-|x| \leq x \leq |x|$ для всех чисел x . (1')

Свойство 1. $|-x| = |x|$, и следовательно,

$$|x - y| = |y - x| \quad (2)$$

для любых действительных чисел x и y .

По определению 1, $|-x| = \max(-x, -(-x)) = \max(-x, x) = \max(x, -x) = |x|$. Δ

(Знаки Δ и ∇ обозначают начало и конец доказательства, соответственно).

Свойство 2. $|xy| = |x| \cdot |y|$ для любых чисел x и y , а если, дополнительно, $y \neq 0$, то $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

По определению 1, $|x| \cdot |y| = \max(x, -x) \cdot \max(y, -y) = xy$ или $-xy$. Так как $|x| \cdot |y| \geq 0$, то $|x| \cdot |y| = \max(xy, -xy) = |xy|$. Если теперь $y \neq 0$, то, по делению, $|x| = |\frac{x}{y} \cdot y| = |\frac{x}{y}| \cdot |y|$, откуда, поделив на $|y| > 0$, получаем утверждение. Δ

Свойство 3 (Неравенство треугольника). $|x + y| \leq |x| + |y|$ для любых чисел x и y . Согласно (1'),

так как $-|x| \leq x \leq |x|$ и $-|y| \leq y \leq |y|$, то $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, и поэтому $|x + y| = \max(x + y, -(x + y)) \leq |x| + |y|$. Δ

Свойство 4. $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ для любых чисел x и y .

На основании свойства 3 имеем $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, откуда $|x| - |y| \leq |x - y|$. Меняя ролями x и y и принимая во внимание равенство (2), получаем, что также $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Поэтому $||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x - y|$. Кроме того, с учетом свойства 1, $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$. Δ

Свойство 5. Неравенство $|x| < a$, $a > 0$, равносильно двойному неравенству $-a < x < a$, и следовательно, неравенство $|x - y| < a$, $a > 0$, равносильно двойному неравенству $y - a < x < y + a$. Аналогично, неравенство $|x| \leq a$, $a > 0$, равносильно двойному неравенству $-a \leq x \leq a$, а неравенство $|x - y| \leq a$, $a > 0$, равносильно двойному неравенству $y - a \leq x \leq y + a$.

Так как, по определению 1, $|x|$ равен наибольшему из чисел x и $-x$, имеют место неравенства $x < a$ и $-x < a$, равносильные двойному неравенству $-a < x < a$. Второе утверждение

доказывается аналогично. $\triangleright$

Упражнение. Докажите: 1) утверждение свойства 4 -

$$|x-y| = \begin{cases} |x|-|y|, & \text{если } xy \geq 0, \\ |x|+|y|, & \text{если } xy < 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$2) \max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Геометрический смысл абсолютной величины $|x|$ (согласно определению 1) - это расстояние на числовой прямой от точки с координатой x до точки 0 (начала координат) (ср. рис. 1). В соответствии с этим, правая часть равенства (3) задаёт расстояние между точками x и y числовой оси, и поэтому, $|x-y|$ называемый расстоянием между числами x и y .

Свойства 1 и 2 распространяются на произвольные конечные наборы чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ в виде утверждений: 1) $|x_1+x_2+\dots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$ и 2) $|x_1 x_2 \dots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \dots |x_n|$.

Доказательство опирается на принцип математической индукции. Продемонстрируем его для утверждения 1). Первый шаг (или база) индукции - проверка справедливости утверждения 1) для случая двух слагаемых; оно справедливо в этом случае в силу свойства 1. Каждый шаг - построение множества и индуктивный переход. Предположим (индукция), что утверждение 1) справедливо для любого набора из k чисел, и докажем, что оно будет справедливым для любого набора из $k+1$ чисел (индуктивный переход). Рассмотрим произвольный набор из $k+1$ чисел $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$. Согласно первому шагу индукции, $|x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}| \leq |x_1+x_2+\dots+x_k|+|x_{k+1}|$. Согласно предположению (индукция) индукции, $|x_1+x_2+\dots+x_k| \leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_k|$. Поэтому, $|x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}| \leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_k|+|x_{k+1}|$ и индуктивный переход завершен. Теперь, на основании принципа математической индукции, заключаем, что утверждение 1) ^{верно} справедливо для любого конечного набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. $\triangleright$

Аналогичным способом доказывается утверждение 2) (проделайте это самостоятельно).

1.3. Элементарные неравенства.

В дальнейшей части используем следующее неравенство, носящее имя швейцарского математика XVIII в. Якоба Бернулли:

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad (4)$$

для всех чисел $a \geq -1$ и всех натуральных чисел n , причём равенство имеет место только в тех очевидных случаях, когда $a=0$ или $n=1$.

Доказательство проводится индукцией по n . При $n=1$ неравенство (4) принимает вид $1+a \geq 1+a$, и, значит, справедливо для всех вообще значений a . Если же оно справедливо для $n=k$, и $a \geq -1$,

то, умножив обе его части на $1+a$ и приняв во внимание, что $1+a > 0$, получим

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a,$$

причем последнее неравенство — строгое при $a \neq 0$. $\triangleright$

Полесны следующие неравенства:

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \quad (5)$$

$$\max(|a|, |b|) \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|, \quad (6)$$

$$|ac+bd| \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} |\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}| &\leq \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

Неравенство (5) равносильно очевидному неравенству $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0$. Справедливость неравенства (6) проверяется возведением в квадрат. При $a>0$ и $b>0$ оно означает геометрически, что в прямоугольном треугольнике катеты меньше гипотенузы, а гипотенуза — суммы катетов. Справедливы (и так же доказываются) неравенства

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \leq \sum_{k=1}^n |a_k|. \quad (6')$$

Неравенство (7) является следствием неравенства $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, последнее же равносильно неравенству $2ab \leq a^2+b^2$, вытекающему из (5).

Если пары чисел a, b и c, d представить как прямоугольные декартовы координаты точек P и Q (на плоскости), то неравенство (8) принимает вид $|\overline{OP} - \overline{OQ}| \leq \overline{PQ} \leq \overline{OP} + \overline{OQ}$; т.е., выражают, что разность двух сторон треугольника OPQ не превосходит третьей, а последняя — суммы первых двух. $\triangleright$

В этом параграфе читатель познакомился с двумя видами математических доказательств: с прямым доказательством и методом математической индукции. Прямое доказательство состоит из конечной цепочки звеньев — рассуждений, в которых первым звеном служат либо определение исследуемого объекта, либо уже известное сведение о нём, а последний звеном — требуемое утверждение. Прямые доказательства используются в §§ 1-6 абелевой алгебры действительного числа, а также неравенства (5) — (8) этого пункта.

§2. Свойства действительных чисел, опирающиеся на аксиому непрерывности.

Ключевая для математического анализа аксиома непрерывности формулируется в терминах множеств. Различные сведения из общей теории множеств излагаются в последующих параграфах по мере возникновения необходимости в их использовании; в этой же параграф включены начальные сведения о множествах.

2.1. Язык теории множеств (основные определения, обозначения).

Родоначальник теории множеств немецкий математик Георг Кантор в 1872 году описал понятие множества как "объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью". Это образное высказывание не может ~~не~~ считаться математическим определением множества — одного из важнейших первичных понятий современной математики, поскольку такого определения вообще нельзя дать вследствие именно первичности самого понятия множества. Последнее обстоятельство не должно нас удручать: понятие точки — тоже первичное, не поддающееся определению, но это не мешает нам изучать науку, объектами исследования которой служат множества точек (отрезки, кривые, треугольники и т.д.).

Для обозначения множеств используют прописные буквы латинского алфавита, включая готический шрифт: $A, B, C, \dots, E, \dots, M$ (прописная латинская буква M в готическом шрифте), N (прописная латинская буква N в готическом шрифте) и т.д.

Для дальнейшего нужно уяснить смысл фразы: дано (определено) множество (скажем, E).

Мы говорим (в полном соответствии с высказыванием Г. Кантора), что множество E определено, если указан признак, позволяющий отнести вещь x к сказать, принадлежит или не принадлежит вещи x множеству E ; например, определено множество студентов страны по признаку принадлежности к указанным высшим учебным заведениям (скажем, по наличию студенческого билета). Специально подчеркнем, что, как и в рассмотренном примере, входящие в заданное множество E объекты считаются различными между собой.

Если объект x входит в множество E , то пишут

$$x \in E \text{ (читается: } x \text{ принадлежит } E \text{)}$$

(1)

и x называют элементом (или точкой) множества E (элементы множеств обозначаются строчными латинскими буквами). В случае, когда вещь y не принадлежит множеству E , пишут $y \notin E$. Так, например, если E — множество всех правильных рациональных дробей, то $\frac{7}{9} \in E$, $0,99 \in E$, $0 \notin E$, $\frac{101}{100} \notin E$, $-\frac{1}{3} \notin E$.

Существуют множества, для которых соотношение (1) не выполняется ни для одной вещи x ; например, множество корней

уравнения $|x|+1=0$ не содержит ни одной вещи x . Множество, не имеющее элементов, называется пустым и обозначается $\emptyset$. Свойство $x \notin \emptyset$ справедливо для любой вещи x .

Множества, содержащие только один элемент, называют одноточечными (или одноэлементными). К таким множествам относится, например, множество корней уравнения $5x-3=0$, которое содержит единственное число $0,6$.

Все множества делятся на два класса: конечные и бесконечные. В том случае, когда множество конечное, его задание может быть определено перечислением всех элементов этого множества в виде $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; примером такого перечисления служит список студентов Кацет группы. Отметим, что $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 1, 3\}$ обозначают одно и то же множество, т.е., с точки зрения теории множеств порядок элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ в обозначении $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ не важен.

Аналогичную запись можно использовать и для бесконечных множеств; например, множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел можно записать в виде $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. К подобной записи прибегают и тогда, когда характеристическое свойство элементов множества описывается одним или несколькими простыми соотношениями; например, множество всех действительных чисел, больших 5, записывается в виде $\{x, x > 5\}$, а множество E всех действительных чисел, заключённых между нулём и единицей, — в виде $\{x, 0 < x < 1\}$. Для последнего множества справедливы соотношения $\sin \frac{\pi}{4} \in E, \frac{\pi}{4} \in E, \sin \frac{\pi}{3} \in E, \frac{\pi}{3} \notin E$.

2.2. Соотношения между множествами.

В соответствии с принятой выше договорённостью, запись $a=b$ означает, что элементы a и b совпадают (и тогда они входят в множество в единственном числе), а запись $a \neq b$ означает, что элементы a и b различные.

Определение 1. Два множества E_1 и E_2 называют равными (что обозначается $E_1 = E_2$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Иными словами,

$$E_1 = E_2, \text{ если из } x \in E_1 \Rightarrow (\text{следует}) x \in E_2 \text{ и из } x \in E_2 \Rightarrow x \in E_1. \quad (2)$$

Знак $\Rightarrow$ (следует) называют знаком импликации.

Это определение (в записи (2)) удобно для сравнения множеств, из которых хотя бы одно непустое. В самом деле, множества $E_1 = \{1, 2, 3\}$ и $E_2 = \{2, 1, 3\}$ равны, а множества $E_1 = \{1, 2\}$ и $E_2 = \{2, 3\}$ не равны ($E_1 \neq E_2$), так как $1 \in E_1, 1 \notin E_2$ (а также, $3 \in E_2, 3 \notin E_1$).

Если же оба множества пусты, то непосредственно из определения 1 их равенство, как будет бы, и не следует. Однако все пустые множества, разумеется, равны между собой. Дело в том, что определение 1 равенства двух множеств можно преобразовать и в иную, логически равносильную форму

$$E_1 = E_2, \text{ если из } y \notin E_1 \Rightarrow y \notin E_2 \text{ и из } y \notin E_2 \Rightarrow y \notin E_1. \quad (2')$$

~~предложение на обороте~~

Именно на основании записи (2') заключаем, что любые два пустые множества (обозначим их $\emptyset_1$ и $\emptyset_2$) равны, ибо для любой вещи y справедливо $y \notin \emptyset_1$ и $y \notin \emptyset_2$.

Таким образом, пустое множество единственно. Но уже различных между собой одноэлементных множеств бесконечно много. Так, все одноэлементные множества $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}$, ..., $E_n = \{n\}$ (n — натуральное число), ... — различные.

Определение 2. Множество A называют частью (или подмножеством) множества B , если из $x \in A \Rightarrow x \in B$, или, что то же самое, если из $y \notin B \Rightarrow y \notin A$. Обозначение: $A \subset B$ (ещё говорят, что A вложено в B). Обратное обозначение: $B \supset A$ (B содержит A).

Понятно, что $A \subset A$ (так как из $x \in A \Rightarrow x \in A$) и что пустое множество есть подмножество всякого другого множества (ибо $y \notin \emptyset \Rightarrow y \notin \text{любое}$ множество). Легко также проверить утверждение, что

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_1 \subset E_2 \text{ и } E_2 \subset E_1, \quad (3)$$

а также, что справедливо и обратное утверждение:

$$E_1 \subset E_2 \text{ и } E_2 \subset E_1 \Rightarrow E_1 = E_2. \quad (4)$$

Замечание 1. Импликация (3) и (4) можно объединить в одну импликацию

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow E_1 \subset E_2 \text{ и } E_2 \subset E_1, \quad (5)$$

в которой знак $\Leftrightarrow$ служит заменой слов "тогда и только тогда, когда".

Замечание 2. Импликация (утверждение) (4) представляет также, почему при рассмотрении понятия множества мы считаем все его элементы различными между собой. Так, формальный набор чисел 1, 2, 3, 2 не является множеством и его не следует записывать в виде $\{1, 2, 3, 2\}$. Действительно, если бы этот набор был множеством, скажем E_1 , то на основании определения 1 и импликации (4), E_1 совпадало бы с множеством $E_2 = \{1, 2, 3\}$. Но тогда два равные конечные множества состояли бы из разных количеств элементов (E_1 — из четырёх, E_2 — из трёх), что противоречит здравому смыслу.

Отметим, что отношение включения множеств, обозначаемое символом $\subset$, обладает свойством транзитивности, т.е.,

$$A \subset B \text{ и } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

(докажи это, опираясь на определение 2).

Можно указать много примеров пар множеств, одно из которых есть часть другого: множество всех треугольников на плоскости есть подмножество всех линейных в ней многоугольников; голая точка образует подмножество всех целых чисел и т.д. Но не следует считать, что из двух множеств одно обязательно есть часть другого; например, множества $E_1 = \{1, 2\}$ и $E_2 = \{2, 3\}$ — несравнимы (в том смысле, что ни одно из них не включено в другое).

2.3. Числовые множества, промежутки.

Множества, состоящие из действительных чисел, называют числовыми. Для множества всех действительных чисел принято обозначение $\mathbb{R}$. Важными подмножествами множества $\mathbb{R}$ являются множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Последнее состоит из чисел, представимых в виде дробей $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, причем дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{km}{kn}$, $k \in \mathbb{N}$, считаются равными, и обычно среди всех равных друг другу дробей в $\mathbb{Q}$ выбирают одну, несократимую дробь (хотя при нахождении суммы или разности дробей каждую приводят к общему знаменателю, т.е., заменив равными им дроби с одинаковым знаменателем; например, $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{20}{25} + \frac{15}{25} = \frac{35}{25}$).

Кроме множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$, основными числовыми множествами, которые рассматривают в математическом анализе, являются промежутки, т.е., множества вида: $[a, b] = \{x, a \leq x \leq b\}$, $(a, b) = \{x, a < x < b\}$, $[a, b) = \{x, a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x, a < x \leq b\}$, где a, b — числа и $a \leq b$ (при $a = b$ множество $[a, b]$ одноточечное, а остальные — пустые), а также множества $(-\infty, a] = \{x, x \leq a\}$, $(-\infty, a) = \{x, x < a\}$, $[b, +\infty) = \{x, x \geq b\}$, $(b, +\infty) = \{x, x > b\}$, где a, b — числа, и множество $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (всех действительных чисел). Примем для них общее обозначение $\langle a, b \rangle$, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Одноточечные множества и пустое множество в $\mathbb{R}$ называют вырожденными промежутками, остальные промежутки — невырожденными. Числа a, b и символы $-\infty, +\infty$ называют концами промежутка $\langle a, b \rangle$. Промежуток $[a, b]$ при $a < b$ называют замкнутым промежутком (соединяющим числа (точки) a и b), промежуток (a, b) при $a < b$ называют открытым промежутком (между числами (точками) a и b). Отрезки и интервалы (a, b) при $a < b$ называют конечными промежутками, остальные невырожденные промежутки — бесконечными; в частности, $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$ — бесконечные интервалы. Число $b - a$ называют длиной конечного промежутка $\langle a, b \rangle$. Наконец, отметим, что записи $[-\infty, a]$, $[b, +\infty]$ и $(b, +\infty]$ бессмысленны, так как символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа.

~~предметные на одност...~~

2.5. Ограниченные и неограниченные множества в $\mathbb{R}$.

Обсуждаемые в этом пункте понятия являются одними из основных в математическом анализе.

Число b называют верхней гранью (для) числового множества E , если $x \leq b$ для всех $x \in E$, т.е. если $E \leq b$, а само множество E называют ограниченным сверху числом b ; на числовой прямой множество E целиком расположено на промежутке $(-\infty, b]$, $E \subset (-\infty, b]$.

Следовательно, согласно правилу логического отрицания приведенных выше определений, число b не является верхней гранью числового множества E , если E содержит некоторое число $x_b \in E$ (индекс b у x_b говорит о том, что выбор числа x_b зависит от b), что $x_b > b$. Аналогично, множество E неограничено сверху, если для любого числа b во множестве E найдётся некоторое $x_b \in E$, что $x_b > b$.

Число a называют нижней гранью (для) числового множества E , если $a \leq x$ для всех $x \in E$, т.е. если $a \leq E$, а само множество E называют ограниченным снизу числом a ; на числовой прямой множество E целиком расположено на промежутке $[a, +\infty)$, $E \subset [a, +\infty)$.

Поэтому, число a не является нижней гранью числового множества E , если E содержит некоторое число $x_a \in E$, что $x_a < a$; и множество E неограничено снизу, если для любого числа a в E найдётся некоторое $x_a \in E$, что $x_a < a$.

Например, множество всех отрицательных чисел ограничено сверху нулём и любым положительным числом, а множество всех положительных чисел ограничено снизу нулём и любым отрицательным числом. В то же время, множество положительных чисел неограничено сверху: никакое число b не является его верхней гранью, поскольку положительное число $x_b = |b| + 1 > b$. Множество отрицательных чисел неограничено снизу: никакое число a не является его нижней гранью, поскольку отрицательное число $x_a = -|a| - 1 < a$.

Числовое множество называют ограниченным, если оно ограничено снизу и сверху, и неограниченным в противном случае (т.е. когда оно неограничено снизу или сверху). Любое ограниченное множество целиком лежит на некотором отрезке.

Каково бы ни было число a утверждения " $a \leq x$ для любого $x \in \emptyset$ " и " $x \leq a$ для любого $x \in \emptyset$ " истинны, поскольку их попытка " $x \in \emptyset$ " лопнет (закон формальной логики). Таким образом, каждое действительное число является и нижней и верхней гранью пустого множества $\emptyset$, и значит, пустое множество $\emptyset$ ограничено (в $\mathbb{R}$).

Теорема 1. Числовое множество E ограничено тогда и только тогда, когда множество модулей его элементов ограничено сверху.

Если существует такое число c , что $|x| \leq c$ для всех $x \in E$, то

$-c \leq x \leq c$ для всех $x \in E$, и значит, E ограничено снизу (числом $-c$) и сверху (числом c). Обратно, если E ограничено, т.е., существуют такие числа a и b , что $a \leq x \leq b$, или, что то же, $x \leq b$ и $-x \leq -a$ для всех $x \in E$, то $|x| = \max(x, -x) \leq \max(b, -a)$ для всех $x \in E$. $\triangleright$

2.6. Наименьший и наибольший элементы числового множества.

Определение 3. Число c называют наименьшим (наибольшим) элементом числового множества E , если 1) $c \in E$ и 2) $c \leq x$ ($x \leq c$); так что каждое число, меньшее (больше) c , уже не принадлежит E . Обозначение: $c = \min E$ ($c = \max E$).

Определением 3 вводятся новые математические объекты. В таком случае мы обязаны убедиться, что: 1) вводимые объекты реально существуют и 2) каждый вводимый объект единственен.

В случае определения 3 первое обстоятельство удостоверяется пометкой ниже теоремой 2, а второе — нижеприведенным утверждением 2.

Утверждение 2. Наименьший (наибольший) элемент числового множества единственен (если существует).

$\triangle$ Если $a_1 = \min A$ и $a_2 = \min A$ для некоторого числового множества A , то $a_1, a_2 \in A$ и $a_1 = \min A \leq a_2$ и $a_2 = \min A \leq a_1$, откуда $a_1 = a_2$. Аналогично (с изменением знаков всех неравенств на противоположные) для $\max A$. $\triangleright$

Теорема 2. Каждое непустое конечное множество E в $\mathbb{R}$ обладает наименьшим и наибольшим элементами.

$\triangle$ Применим индукцию по числу элементов множества E . Если E состоит из одного числа a , то, очевидно, a есть и наименьший и наибольший элемент в E . Предположим теперь, что каждое множество в $\mathbb{R}$, состоящее из $n, n \in \mathbb{N}$, чисел, обладает наименьшим и наибольшим элементами, и пусть количество элементов множества E равно $n+1$. Удалив из E какой-нибудь элемент a , получим подмножество E_1 множества E , состоящее из n чисел. По предположению в E_1 имеется наименьший элемент $b = \min E_1$ и наибольший элемент $c = \max E_1$. Покажем, что $\min(a, b) = \min E$ и $\max(a, c) = \max E$. Действительно, так как $b, c \in E_1 \subset E$, то $a, b, c \in E$ и $\min(a, b), \max(a, c) \in E$; при этом, если $x \in E$ и $x \neq a$, то $x \in E_1$ и $b \leq x \leq c$, и поэтому тем более, $\min(a, b) \leq x \leq \max(a, c)$, а если все $x = a$, то снова $\min(a, b) \leq x = a \leq \max(a, c)$. $\triangleright$

Из определения 3 следует, что каждое множество в $\mathbb{R}$, обладающее наименьшим (наибольшим) элементом, ограничено им снизу (сверху). Поэтому, по теореме 2, заключаем, что каждое непустое ~~конечное~~ конечное числовое множество ограничено; с другой стороны, как уже отмечалось, и пустое множество в $\mathbb{R}$ ограничено.

Бесконечное множество в $\mathbb{R}$, хотя бы ограниченное снизу (сверху), может не обладать наименьшим (наибольшим) элементом.

Так, множество всех положительных чисел ограничено снизу, но наименьшего положительного числа нет: для любого положительного числа ε существует положительное число, например $\frac{\varepsilon}{2}$, меньшее ε . Однако, множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел обладает следующим важным свойством.

Теорема 3. Каждое непустое множество E в $\mathbb{N}$ обладает наименьшим элементом.

Докажем это условием. Существует натуральное $n \in E$. Множество E_1 всех $x \in E$, не превосходящих n , не пусто (E_1 содержит n) и конечно (каждое множество элементов подмножества $E_1 \subseteq E$ не превосходит n). По теореме 2, E_1 обладает наименьшим элементом $\min E_1$, который будет наименьшим и в E ; т.е., $\min E = \min E_1$. $\triangleright$

Отметим, что $\min \mathbb{N} = 1$.

2.7. Аксиома непрерывности. Принцип Архимеда.

Непрерывность множества $\mathbb{R}$ состоит в том, что в $\mathbb{R}$ нет "пустот". А именно, имеет место следующее утверждение, которое мы примем за аксиому.

Аксиома непрерывности. Для любых двух непустых множеств A и B в $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $A \leq B$, существует хотя бы одно такое число c , что $A \leq c \leq B$.

Эту аксиому называют также аксиомой отделимости числовых множеств. На числовой прямой она означает простейший наглядный вид (см. рис. 1).

Впервые точный смысл утверждения, что прямая "непрерывна" сформулировала ~~и~~ немецкий математик Ю. В. Р. Дедекинд в работе "Непрерывность и иррациональные числа" в 1872 году. В формулировке Дедекинда аксиома непрерывности выглядит следующим образом: сформулированной выше аксиомы. Однако, можно доказать, что обе формулировки равносильны.

Из многочисленных важнейших следствий аксиомы непрерывности приведем пока только "принцип Архимеда".

Теорема 4. Для каждого положительного числа x существует натуральное число n , большее x (т.е., множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел не ограничено сверху в $\mathbb{R}$).

Докажем, вопреки утверждению теоремы, что множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху, так что множество B всех его верхних граней не пусто. Так как $\mathbb{N} \leq B$, то по аксиоме непрерывности существует такое число c , что $\mathbb{N} \leq c \leq B$. Отношение $\mathbb{N} \leq c$ показывает, что c — одна из верхних граней множества B , и поэтому $c \in B$, а отношение $c \leq B$ означает теперь, что $c = \min B$. Поэтому, $c - 1 \notin B$; т.е., $c - 1$ не является верхней гранью для $\mathbb{N}$, и следовательно, существует натуральное число $n > c - 1$, откуда $c < n + 1$. Но, с другой стороны, внесите c и также $n + 1 \in \mathbb{N}$, и так как $\mathbb{N} \leq c$, то $n + 1 \leq c$. Однако, неравенства $c < n + 1 \leq c$ невозможны. Полученное противоречие означает, что сделанное в самом начале доказательства допущение неверно, а верно утверждение теоремы. $\triangleright$

2.8. Целая часть действительного числа.

Важнейшим следствием принципа Архимеда и теоремы 3 пункта 2.6 является такая замечательная

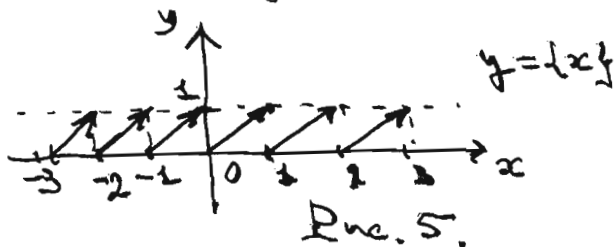
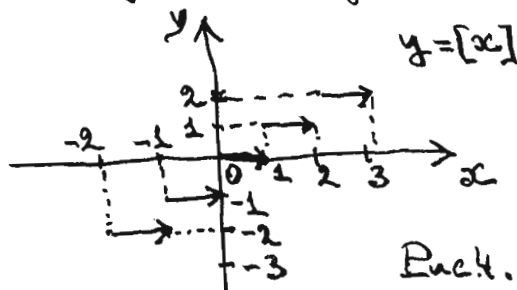
Теорема 5. Для каждого действительного числа x существует наибольшее целое число, не превосходящее x .

Для доказательства этой теоремы можно сначала усилить теорему 3 пункта 2.6 в виде утверждения, что каждое непустое

множество целых чисел, ограниченное снизу, обладает наименьшим элементом, и затем проверить его равносильность утверждению, что каждое непустое множество целых чисел, ограниченное сверху, обладает наибольшим элементом. Предоставляю любознательному читателю получить эти доказательства.

Определение 4. Наибольшее целое число, не превосходящее x , называем целой частью числа x и обозначают $[x]$.

Таким образом, в силу теоремы 5, для произвольного действительного числа x символ $[x]$ обозначает единственное целое число, удовлетворяющее неравенствам $[x] \leq x < [x] + 1$. Число $x - [x] = \{x\}$, $0 \leq \{x\} < 1$, называем дробной частью числа x . Графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ изображены на рисунках 4 и 5.



Затем произвольного действительного числа x в форме $x = [x] + \{x\}$ хорошо известно из школы под видом утверждения, что любое непериодическое действительное число равно сумме своей целой и дробной частей (последняя в виде некоторой десятичной дроби). Это утверждение допускает строгое математическое доказательство.

2.3. Свойство плотности множества рациональных чисел:

Приведем важнейшее следствие принципа Архимеда и теоремы 5.

Теорема 6. Между любыми двумя действительными числами, отличающимися друг от друга на расстояние, большее единицы, заключено хотя бы одно целое число. Между любыми двумя различными действительными числами a и $b > a$ заключено бесконечное множество рациональных чисел.

Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $y - x > 1$, то в силу неравенств для целой части числа $x < [x] + 1 \leq x + 1 < y$, так что $[x] + 1$ и есть требуемое целое число.

По принципу Архимеда, существует натуральное число $n > \frac{1}{b-a}$, откуда $nb - na > 1$. На основании только что доказанного, существует целое число m , заключенное между na и nb , т.е., $na < m < nb$. Тогда рациональное число $\frac{m}{n}$ заключено между a и b , так как $a < \frac{m}{n} < b$. Таким образом, множество рациональных чисел, заключенных между a и b , непусто. Каково бы ни было непустое конечное множество таких чисел, между наибольшим из них, существующим по теореме 2 пункта 2.6, и числом b , по доказанному, найдется еще одно рациональное число. Следовательно, между a и b имеется бесконечное множество рациональных чисел. $\triangleright$

Свойство множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел, установленное в теореме 6, называют свойством плотности множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. На этом свойстве основана, в частности, возможность приближения каждого действительного числа рациональными числами (с недостатком и с избытком) с любой степенью точности.

2.10. Иррациональные числа.

Покажем, что число $\sqrt{2}$, определённое как положительный корень уравнения $x^2 - 2 = 0$, не является рациональным числом. В самом деле, если бы существовала несократимая дробь $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, $m, n \in \mathbb{N}$, то $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2n^2$, так что числа m^2 и n^2 были бы чётными числами вместе с числами n^2 и n , а дробь $\frac{m}{n}$ оказалась бы, вопреки предположению, сократимой.

Действительное число называют иррациональным, если оно не является рациональным; число $\sqrt{2}$ — иррациональное. Простейшие свойства иррациональных чисел вытекают из свойств рациональных чисел. Например, поскольку сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел суть числа рациональные, то сумма и разность иррационального и рационального числа, произведение и частное иррационального числа и рационального числа, отличного от нуля, обязаны быть иррациональными числами.

Хотя проверка свойства иррациональности числа в конкретных случаях сравнительно проста (докажем, например, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональное), множество иррациональных чисел (обозначим его $\mathbb{R}'$) значительно "могуще" множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел в том смысле, что существует взаимно однозначное соответствие множеств $\mathbb{R}'$ и $\mathbb{R}$, но такого не может быть между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Мы не станем доказывать эти результаты, относящиеся к специальной области математики — теории множеств, а укажем лишь более слабый результат, имеющий, однако, важное приложение.

Теорема 7. Множество иррациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$; т.е., между любыми двумя различными действительными числами a и b заключено бесконечное множество иррациональных чисел.

4 Как и в доказательстве свойства плотности множества $\mathbb{Q}$ (теорема 6), достаточно проверить, что между a и b заключено хотя бы одно иррациональное число. Поскольку $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ и в силу плотности множества $\mathbb{Q}$ между $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{2}}$ заключено бесконечное множество рациональных чисел, существует некоторое $\frac{m}{n} \neq 0$ и $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Тогда число $\frac{m}{n}\sqrt{2}$, по внешнему отношению, иррациональное и $a < \frac{m}{n}\sqrt{2} < b$.

Из теорем 6 и 7, в частности, следует, что любой невырожденный промежуток содержит бесконечные множества рациональных и иррациональных чисел.

Заключительное замечание. В этом параграфе мы дали лишь наглядное с новым видом доказательства теорем — доказательством от противного. Сущность такого доказательства состоит в том, что делается предположение о верности утверждения, противоположного утверждению теоремы, и путём логических рассуждений приходится к заключению, противоречащему условию теоремы. Таковым был доказательство принципа Архимеда и свойства иррациональности числа $\sqrt{2}$.

§3. Принципы построения множества действительных чисел.

3.1. Свойство верхних граней числового множества.

Теорема (о верхних гранях числового множества). Множество всех верхних граней любого ограниченного сверху непустого числового множества обладает наименьшим элементом.

△ Рассмотрим произвольное непустое числовое множество E , ограниченное сверху. Тогда существует число v_0 , что $x \leq v_0$ для всех $x \in E$, или $E \leq v_0$. Поэтому множество B всех верхних граней множества E не пусто (B содержит v_0) и так как $x \leq v$ для любых $x \in E$ и любых $v \in B$, то множества E и B удовлетворяют аксиоме отделимости числовых множеств, согласно которой существует число c , что

$$E \leq c \leq B. \quad (1)$$

Левое отношение $E \leq c$ в (1) показывает, что число c есть верхняя грань для E , и следовательно, $c \in B$. Теперь правое отношение $c \leq B$ показывает, что $c = \min B$. ▽

Замечание 1. Выше, в §2, отмечалось, что пустое множество $\emptyset$ в $\mathbb{R}$ ограничено сверху любым действительным числом; т.е., каждое действительное число является верхней гранью для $\emptyset$. Но все $\mathbb{R}$ не имеет наименьшего элемента (числа), и поэтому утверждение теоремы перестает быть справедливым для пустого множества.

3.2. Точная верхняя грань числового множества.

Поскольку числовое множество может иметь единственный ~~на~~ наименьший элемент, теорема предыдущего пункта позволяет ввести следующее

Определение 1. Наименьшая верхняя грань $\leq$ ограниченного сверху непустого числового множества E называется точной верхней гранью этого множества и обозначается $c = \sup E$ (читается: супремум E).

Условие непустоты множества в этом определении существенно, поскольку, как отмечалось выше, пустое множество ограничено сверху в $\mathbb{R}$, но не имеет точной верхней грани.

Теорема (критерий точной верхней грани числового множества). Для того, чтобы число $M \in \mathbb{R}$ было точной верхней гранью непустого числового множества E , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $x \leq M$ для всех $x \in E$, и 2) для любого числа $p < M$ можно указать такой элемент (число) $x_p \in E$, что $p < x_p \leq M$.

△ **Необходимость.** Дано, что $M = \sup E$. Тогда, по определению 1, число M есть наименьшая из верхних граней множества E , и поэтому $x \leq M$ для всех $x \in E$, а любое число $p < M$ не является верхней гранью для E , и следовательно, существует некоторое $x_p \in E$, что $p < x_p$. Окончательно, $p < x_p \leq M$. ▽

Достаточность. Дано, что число M обладает свойствами 1) и 2), указанными в теореме. Согласно свойству 1), $x \leq M$ для всех $x \in E$, так что M — одна из верхних граней множества E . Согласно свойству 2), для любого числа $p < M$ существует такое $x_p \in E$, что $p < x_p$, и следовательно, число p не является верхней гранью множества E . Окончательно, число M — наименьшая верхняя грань для E , или $M = \sup E$. ▽

Доказанная теорема допускает равносильную формулировку.
Теорема. Число $M \in \mathbb{R}$ будет точной верхней гранью непустого числового множества E в том и только в том случае, когда: 1) $x \leq M$ для любого $x \in E$, и 2) для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой элемент $x_\varepsilon \in E$, что $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M$.

Следствие. Если множество E обладает наибольшим элементом c , $c = \max E$, то $c = \sup E$.

4 По условию и определению числа $\max E$, $c \in E$ и $x \leq c$ для всех $x \in E$. Кроме того для любого $c' < c$ множество E содержит элемент $x = c$, $x > c'$. Δ

Замечание 2. Таким образом, понятие точной верхней грани числового множества можно считать обобщением понятия наибольшего элемента числового множества. Кроме того, указанное следствие объясняет также, почему в определении верхней грани числового множества E (в пункте 2.5, § 2) вместо свойства " $x \leq b$ для всех $x \in E$ " нельзя требовать свойства " $x < b$ для всех $x \in E$ ". В последнем случае у любого числового множества, обладающего наибольшим элементом, не существовало бы наименьшей верхней грани (и теорема пункта 3.1 была бы неверна).

3.3. Свойство нижних граней числового множества.

Теорема (о нижних гранях числового множества). Множество всех нижних граней любого ограниченного снизу непустого числового множества обладает наибольшим элементом.

Δ Рассмотрим произвольное ограниченное снизу непустое множество E . Тогда найдётся такое число a_0 , что $a_0 \leq x$ для всех $x \in E$. Обозначим через A множество всех нижних граней множества E . Так как $a_0 \in A$, то $A \neq \emptyset$ и $a \leq x$ для всех $x \in E$ и всех $a \in A$. Таким образом, множества A и E удовлетворяют аксиоме отделимости числовых множеств, согласно которой существует некоторое число $m \in \mathbb{R}$, что

$$A \leq m \leq E. \quad (2)$$

Правое соотношение $m \leq E$ в (2) показывает, что m есть нижняя грань для E , и следовательно, $m \in A$. Тогда левое соотношение $A \leq m$ в (2) означает, что $m = \max A$. Δ

Замечание 3. В § 2, пункт 2.5, отмечалось, что пустое множество $\emptyset$ в $\mathbb{R}$ ограничено снизу любым действительным числом, т.е., каждое действительное число является нижней гранью для $\emptyset$. Но $\mathbb{R}$ не имеет наибольшего числа, и поэтому утверждение теоремы перестает быть справедливым для пустого множества.

3.4. Точная нижняя грань числового множества.

Определение 2. Наибольшая нижняя грань m ограниченного снизу непустого числового множества E называется точной нижней гранью этого множества и обозначается $m = \inf E$ (читается: инфимум E).

Теорема (критерий точной нижней грани числового множества). Число $m \in \mathbb{R}$ будет точной нижней гранью непустого числового множества E в том и только в том случае, когда: 1) $m \leq x$ для всех $x \in E$, и 2) для любого числа $q \in \mathbb{R}$, $m < q$, можно указать такой элемент (число) $x_q \in E$, что $m \leq x_q < q$ (или 2') для любого числа $\varepsilon > 0$ существует некоторое число $x_\varepsilon \in E$, что $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Δ Доказательство этой теоремы аналогично доказательству критерия

рия точной верхней грани числового множества. Пусть $m = \inf E$. Тогда, согласно определению 2, число m есть наибольшая из нижних граней множества E , и поэтому $m \leq x$ для всех $x \in E$, а любое число $q > m$ не является нижней гранью для E , и следовательно, существует некоторое $x_q \in E$, что $m \leq x_q < q$. Обратно, пусть число m обладает свойствами 1) и 2) (или 2'), указанными в теореме. Согласно свойству 1), $m \leq x$ для всех $x \in E$, так что m — одна из нижних граней множества E . Согласно свойству 2), для любого числа $q > m$ существует такое $x_q \in E$, что $m \leq x_q < q$, и следовательно, число q не является нижней гранью множества E . Следовательно, число m — наибольшая нижняя грань для E , или $m = \inf E$. Δ

Следствие. Если числовое множество E обладает наименьшим элементом $a = \min E$, то $a = \inf E$.

«Согласно определению числа $a = \min E$, имеем $a \in E$ и $a \leq x$ для всех $x \in E$. Кроме того, для любого числа $q > a$ множество E содержит элемент $x_q = a$, $x_q < q$. Δ

Замечание 4. Это следствие объясняет, почему в определении (§2, пункт 2.5) нижней грани a числового множества E вместо свойства " $a \leq x$ для всех $x \in E$ " нельзя использовать свойство " $a < x$ для всех $x \in E$ ". В последнем случае у любого числового множества, обладающего наименьшим элементом, не существовало бы наибольшей нижней грани (и теорема пункта 3.3 была бы неверна).

Замечание 5. Теоремы о существовании точной верхней и точной нижней граней числовых множеств связаны свойствами двойственности в том смысле, что одну из них можно получить из другой посредством следующего наблюдения: непустое числовое множество E ограничено сверху тогда и только тогда, когда множество $-E$ ограничено снизу; и при этом, $\sup E = -\inf(-E)$ и $\inf(-E) = -\sup E$ (читателю предлагается самостоятельно доказать эти утверждения).

Замечание 6. Уменьшительную иллюстрацию критерием точной верхней и точной нижней граней числовых множеств дают рисунки 6 и 7.



Рис. 6

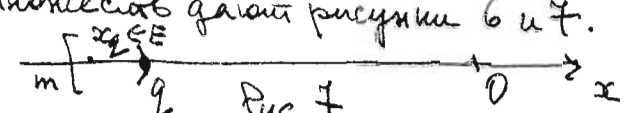


Рис. 7.

На рис. 6 изображена картинка, соответствующая случаю числа $M = \sup E$, когда множество E целиком содержится в промежутке $(-\infty, M]$ и любой промежуток $(p, M]$, $p < M$, обязан содержать хотя бы одну точку $x_p \in E$. Рис. 7 иллюстрирует для числа $m = \inf E$, когда множество E целиком лежит в промежутке $[m, +\infty)$ и каждый промежуток $[m, q)$, $q > m$, обязан содержать хотя бы одну точку $x_q \in E$.

Важное замечание. В дальнейшем условимся записать $\sup E < +\infty$ ($\sup E = +\infty$) обозначать ограниченное сверху (не ограниченное сверху) непустое числовое множество E ; и если $\sup E < +\infty$, то $\sup E$ есть число — точная верхняя грань множества E . Таким образом, для каждого непустого числового множества E справедливо либо $\sup E < +\infty$, либо $\sup E = +\infty$. Аналогично, запись $\inf E > -\infty$ ($\inf E = -\infty$) обозначает ограниченное снизу (не ограниченное снизу) непустое числовое множество E ; и если

(4)

$\inf E > -\infty$, то $\inf E$ есть число - нижняя граница множества E .
Таким образом, для каждого непустого числового множества E справедливо
либо $\inf E > -\infty$, либо $\inf E = -\infty$.

3.5. Выпуклые числовые множества.

Множество в $\mathbb{R}$ называют выпуклым, если вместе с каждым двумя своими точками a, b оно содержит весь соединяющий их отрезок.

Каждый промежуток есть выпуклое множество. Действительно, пусть $a, b \in \langle \alpha, \beta \rangle$ и $a < c < b$; тогда, так как $\alpha \leq a$ и $b \leq \beta$, то имеем $\alpha < c < \beta$, и значит, $c \in \langle \alpha, \beta \rangle$. В частности, $\emptyset$ и единичный интервал есть выпуклые множества.

Докажем, что верно и обратное.

Утверждение. Любое выпуклое множество в $\mathbb{R}$ является промежутком.

◁ Пусть E - выпуклое множество в $\mathbb{R}$. Если $E = \emptyset$, то, как отмечено выше, E - промежуток. Пусть $E \neq \emptyset$ и $\alpha = \inf E$, $\beta = \sup E$ ($\alpha = -\infty$, если E не ограничено снизу; $\beta = +\infty$, если E не ограничено сверху). Так как $E \neq \emptyset$, то существует $x \in E$, что $\inf E \leq x \leq \sup E$, так что $\alpha \leq \beta$. Пусть $x \in (\alpha, \beta)$, т.е., $\alpha < x < \beta$. Тогда в E существует точка $a < x$ (поскольку $x > \inf E$) и точка $b > x$ (так как $x < \sup E$). Будучи выпуклым, E вместе с a и b содержит также точку x . Таким образом, $(\alpha, \beta) \subseteq E$. С другой стороны, E ~~может содержать~~ ~~не~~ E не содержит точек, лежащих левее α или правее β . Таким образом, E может содержать ещё лишь α или β и тем самым является одним из промежуточных $\langle \alpha, \beta \rangle$. ▷

Объединяя результаты этого пункта, заключаем, что справедлива следующая

Теорема. Множество в $\mathbb{R}$ выпукло тогда и только тогда, когда оно является промежутком. При этом, левый конец непустого промежутка есть его нижняя граница, а правый - верхняя граница.

Замечательное замечание. В этом параграфе мы познакомились с новым типом теорем, когда в единый текст собраны две теоремы, и если одну из них назвать прямой, то другая становится к ней обратной. Таковыми являются теорема этого пункта, а также критерии точных верхней и нижней границ. Последние обладают ещё одной особенностью. Если в их формулировках фразы, стоящие перед словами "тогда и только тогда, когда" считать предложением некоторых новых объектов исследования, а фразы, помещённые после этих слов - некоторыми свойствами, то критерий означает, что вводимый объект обладает этими свойствами (необходимое условие в теореме) и что, обратно, наличие этих свойств выделит из остальных именно этот объект (достаточное условие в теореме). Отличительная особенность присутствует и в ~~формулировке~~ структуре доказательства.

§4. Операции над множествами.

Изложенные в этом параграфе результаты относятся к множествам абсолютно произвольной природы.

4.1. Операция объединения множеств.

Определение 1. Объединением двух множеств E_1, E_2 называется множество E , содержащее все элементы множества E_1 , все элементы множества E_2 и не содержащее никаких других элементов. Обозначение: $E = E_1 \cup E_2 = \bigcup_{k=1}^2 E_k$.

Из определения непосредственно следует, что: а) $E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$ и б) $(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$.

Определение 2. Если каждому элементу α множества I отвечает множество E_α , то совокупность $E_\alpha, \alpha \in I$, назовём системой множеств.

В определении 1 шла речь об объединении системы множеств E_1, E_2 , порождённой множеством $I = \{1, 2\}$.

Определение 3. Объединением системы множеств $E_\alpha, \alpha \in I$, называется множество E , содержащее все элементы всех множеств E_α и не содержащее никаких других элементов. Обозначение: $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$.

Например, если $E_n = \{n\}$, n - натуральные числа, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{N}$, т.е. множество натуральных чисел - объединение бесконечной системы одноэлементных множеств.

4.2. Операция пересечения множеств.

Определение 4. Пересечением системы множеств $E_\alpha, \alpha \in I$, называется множество E , содержащее все элементы, входящие в каждое из множеств $E_\alpha, \alpha \in I$, и не содержащее никаких других элементов. Обозначение: $E = \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha$.

Пересечение двух множеств E_1, E_2 обычно записывают в виде $E_1 \cap E_2$, трёх множеств E_1, E_2, E_3 - в виде $E_1 \cap E_2 \cap E_3$. Непосредственно проверяется, что $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$ и что $(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$.

Из определений 3 и 4 следует, что для любого $\alpha_0 \in I$ верны утверждения:

$$E_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \quad \text{и} \quad E_{\alpha_0} \supset \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha. \quad (1)$$

Операции объединения и пересечения множеств связаны свойствами:

$$\begin{aligned} \text{а) } (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C); \quad \text{б) } (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C); \\ \text{в) } \left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \right) \cap C &= \bigcup_{\alpha \in I} (E_\alpha \cap C); \quad \text{г) } \left(\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha \right) \cup C = \bigcap_{\alpha \in I} (E_\alpha \cup C); \end{aligned}$$

где свойства в) и г) суть обобщения свойств а) и б), соответственно.

Доказательства этих свойств основаны на определении операции объединения и пересечения множеств и на утверждении (импликация) (4), §2. Проиллюстрируем это для свойства а), предоставляя читателю доказать свойства б) - г) самостоятельно.

Δ Если $x \in (A \cup B) \cap C$, то согласно определению 1 и 4, $x \in (A \cup B)$ и $x \in C$, откуда $x \in C$ и $x \in A$ или $x \in B$. Поэтому, $x \in (C \cap A)$ или $x \in (C \cap B)$, и следовательно, $x \in (C \cap A) \cup (C \cap B) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Таким образом, доказано, что

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C). \quad (2)$$

Если $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, то $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$, так что $x \in A$ и $x \in C$ или $x \in B$ и $x \in C$. В обоих случаях $x \in C$ и $x \in A \cup B$ (поскольку $A \subset A \cup B$ и $B \subset A \cup B$). Таким образом, $x \in C \cap (A \cup B) = (A \cup B) \cap C$, и доказано, что

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \quad (3)$$

Вложения (2) и (3) вместе с формулой (4), § 2, доказывают равенство $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. $\triangleright$

4.3. Дополнение множества.

Определение 5. Если $A \supset B$, то множество элементов множества A , не принадлежащих множеству B , называется дополнением множества B до множества A и обозначается символом $C_A B$.

Теорема 1 (принцип двойственности). Если все множества $E_\alpha \subset A$, $\alpha \in I$, то дополнение к объединению множеств равно пересечению дополнений, а дополнение к пересечению равно объединению дополнений, т.е.,

$$C_A \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} C_A E_\alpha, \quad (4)$$

$$C_A \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} C_A E_\alpha. \quad (5)$$

Δ Так как проверка равенств (4) и (5) проходит совершенно одинаково, то ограничимся проверкой только равенства (4). Проверку равенства (5) читатель проведёт самостоятельно.

Итак, пусть $x \in C_A \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$. Отсюда последовательно выводим на основании определения 5, что $x \in A$, $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, и по определению 3, $x \notin E_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, так что, опять по определению 5, $x \in C_A E_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, и по определению 4, $x \in \bigcap_{\alpha \in I} C_A E_\alpha$. Этим показано, что каждый элемент левой части равенства (4) входит в правую часть того же равенства.

Для завершения доказательства теоремы остаётся проверить обратное утверждение. Пусть $y \notin C_A \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$. Тогда $y \in \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, и значит, найдётся такое $\alpha_0 \in I$, что $y \in E_{\alpha_0}$. Тем самым $y \notin C_A E_{\alpha_0}$ и $y \notin \bigcap_{\alpha \in I} C_A E_\alpha$. Теорема доказана. $\triangleleft$

4.4. Разность множеств.

(3)

Определение 6. Разностью множеств A и B называется множество всех элементов множества A , не принадлежащие множеству B . Обозначение: $A \setminus B$.

В случае, когда $B \subset A$, из этого определения и определения 5 следует, что $A \setminus B = C_A B$.

Лемма 2. Справедливо равенство $A \setminus B = C_A (A \cap B)$.

Если $x \in A \setminus B$, то $x \in A$, $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$, $x \in C_A (A \cap B)$; т.е., $A \setminus B \subset C_A (A \cap B)$. Противоположное включение доказывается аналогично. Δ

Заключительное замечание. Договорившись, в случае, когда в семействе множеств E_α , $\alpha \in I$, множество индексов I есть множество N всех натуральных чисел, писать E_n , $n \in N$, и использовать обозначения:

$$\bigcup_{n \in N} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \bigcap_{n \in N} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

§ 5. Отображения и функции.

5.1. Декартово произведение множеств.

Рассмотрим произвольные непустые множества A и B . Для каждого элемента $a \in A$ и любого элемента $b \in B$ образуем упорядоченную пару $(a, b) = c$. По определению, две упорядоченные пары $(a_1, b_1) = c_1$ и $(a_2, b_2) = c_2$ совпадают (т.е., $c_1 = c_2$) тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Поэтому упорядоченные пары (a, b) и (b, a) совпадают только в том случае, когда $a = b$; если же $a \neq b$, то упорядоченные пары (a, b) и (b, a) различные.

Определение 1. Множество C всех упорядоченных пар $c = (a, b)$, $a \in A$, $b \in B$, называют декартовым произведением множеств A и B , и обозначают $C = A \times B$.

Если $A = \mathbb{R}$ и $B = \mathbb{R}$, то декартово произведение $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ обозначают символом $\mathbb{R}^2$, т.е., $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Элементами множества $\mathbb{R}^2$ являются все упорядоченные пары вида (x, y) , $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Элементы множества $\mathbb{R}^2$ допускают геометрическое изображение посредством точек координатной плоскости Π с выбранной на ней прямоугольной (декартовой) системой координат. Каждому элементу (x, y) множества $\mathbb{R}^2$ ставится в соответствие точка на Π с абсциссой x и ординатой y . И это соответствие взаимнооднозначное. Подробней эти вопросы рассмотрены ниже в пункте 5.7.

5.2. Общие понятия функций и отображений. Рассмотрим (24)
декартово произведение $X \times Y$ произвольных непустых множеств X и Y (для наглядности считать можно, что $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$).

Произвольное множество S в $X \times Y$ называем соответствием между множествами X и Y . Множество первых элементов пар (x, y) , образующих соответствие S , называем областью определения этого соответствия и обозначают D_S (иногда, $D(S)$); множество вторых элементов называем множеством значений соответствия S и обозначают R_S . Одно и то же x может быть первым элементом различных пар $(x, y) \in S$; т.е., соответствие S может быть многозначным. Например, если S обозначает множество всех пар (x, y) действительных чисел, удовлетворяющих условию $x \leq y$, так что $D_S = \mathbb{R}$, то при данном $x \in \mathbb{R}$ имеем $(x, y) \in S$ для всех $y \geq x$. Соответствие S называем однозначным, если для каждого $x \in D_S \subset X$ существует единственное $y \in Y$, такое, что $(x, y) \in S$.

Определение 2. Функцией или отображением называют всякое однозначное соответствие.

Термин "функция" будем всегда использовать в случае $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$; в остальных случаях будем использовать термин "отображение".

Если f есть некоторая функция (отображение) из множества X в множество Y и $x \in D_f$, то единственное y , для которого $(x, y) \in f$, называется значением f в x или образом x при отображении f и обычно обозначают $f(x)$. Но можно так обозначать и саму функцию и говорить "функция $f(x)$ ". В этом случае под x понимают не фиксированный, а общий элемент множества D_f . Нормально одинаково обозначены разные вещи, надо всегда ясно представлять, что в данном контексте обозначает буква x под знаком функции f : фиксированный или же переменный элемент области её определения.

Из определения 2 следует, что функции f и g равны тогда и только тогда, когда совпадают их области определения и $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in D_f = D_g$.

Функция f ставит в соответствие каждому элементу x её области определения однозначно определённое значение $f(x)$. Это наглядно отражено в записи вида $x \rightarrow f(x)$, $x \in D_f$, часто употребляемой для обозначения функции.

Обратно, если каждому элементу x какого-либо множества атрибуирован определённый элемент y того же или другого множества, то получаются при этом пары (x, y) образующие однозначное соответствие; т.е., функцию. Этим и объясняется наименование функции отображением; обычно так и задаются функции.

Переменный элемент x области определения функции f называют аргументом этой функции и говорят "ф есть функция аргумента x ".

Определение 3. Функцию f называем инъективной, если её значения в разных точках области определения различны; т.е., свойство $f(x') \neq f(x)$ влечёт утверждение $x' \neq x \in D_f$.

Если область определения D_f функции f совпадает с X ($D_f = X$), то

говарят, что f есть отображение множества X в Y и пишут $f: X \rightarrow Y$. Если $R_f = Y$, то f называют отображением на Y (а не "в Y ").
Инъективные отображения множества X на множество Y устанавливают взаимно-однозначные соответствия (биекции) множеств X и Y .
(или между множествами X и Y).

5.3. Тождественные функции (отображения).

Так называют функции (отображения), каждое значение которых совпадает со значением аргумента, т.е., $f(x) = x$ для всех $x \in D_f$. В этом случае $R_f = D_f$. Тождественную функцию из множества A в A , область определения которой совпадает с A , обозначают I_A . Таким образом, I_A есть тождественное отображение множества A на себе. Тождественное отображение множества A в содержащее его множество B ($A \subset B$), очевидно, инъективно, его называют тождественным вложением множества A в множество B .

5.4. Композиция отображений.

Композицией функций g и f называют функцию $f \circ g$ (читается: "эф на же"), определенную формулой

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad (1)$$

для всех x , для которых правая часть в (1) имеет смысл. Для того, чтобы $f(g(x))$ имело смысл, нужно, во-первых, чтобы $x \in D_g$, и, во-вторых, чтобы $g(x) \in D_f$. Поэтому

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g; g(x) \in D_f\}. \quad (2)$$

Непосредственно из определения проверяется, что $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ (композиция функций есть ассоциативная операция) и $g \circ I_{D_g} = I_{D_g} \circ g = g$ (тождественное отображение служит единицей относительно композиции).

Лемма 1. Композиция инъективных функций g и f инъективна.

□ Если $x', x \in D_{f \circ g}$ и $f(g(x')) = f(g(x))$, то, в силу инъективности функции f , имеем $g(x') = g(x)$, откуда, в силу инъективности функции g , получаем $x' = x$. □

Из формул (1) и (2) следует, что $D_{f \circ g} \subset D_g$ и $R_{f \circ g} \subset R_f$, причем $D_{f \circ g} = D_g$ только, когда $R_g \subset D_f$. Отсюда, в частности, следует, что если g есть отображение множества X в Y , а f есть отображение множества Y в Z , то их композиция $f \circ g$ будет отображением множества X в множество Z по схеме $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$. Поэтому лемма 1 допускает также

Следствие. Композиция биекции g множеств X и Y и биекции f множеств Y и Z есть биекция множеств X и Z .

Область определения композиции может оказаться пустой (например для $\log(-x^2)$). Конечно, что $D_{f \circ g} = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $R_g \cap D_f = \emptyset$.

Итак, наконец, что композиция функций g и f , определенную формулой (1), называют также сложной функцией.

5.5. Сужение функции (ограничение).

(6)

Сужением функции f на множество $E \subset D_f$ называют функцию (обозначим её $f|_E$), определённую следующими условиями: 1) $D(f|_E) = E$, 2) $f|_E(x) = f(x)$ для всех $x \in E$.

Понятно, что $f|_{D_f} = f$. Более того, $f|_E = f \circ i$, где i обозначает тождественное вложение множества E в D_f . Действительно, так как $R_i = E \subset D_f$, то $D_{f \circ i} = D_i = E = D_{f|_E}$ и $(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x) = f|_E(x)$ для всех $x \in E$.

Необходимость рассмотрения понятия сужения функции поясним следующими примерами. Функция $f(x) = x^2$ определена на всей числовой прямой, $D_f = \mathbb{R}$, отображает $\mathbb{R}$ на промежутки $[0, +\infty) = R_f$, но f не является биекцией множеств D_f и R_f , и следовательно, не имеет на $[0, +\infty) = R_f$ обратной функции. С другой стороны, её сужение $f|_E$ на множество $E = [0, +\infty) \subset D_f$ осуществляет биекцию множеств $D_{f|_E} = [0, +\infty)$ и $R_{f|_E} = R_f = [0, +\infty)$ и на $[0, +\infty)$ имеет обратную функцию.

5.6. Операции над функциями.

Возможность выполнять над действительными числами различные операции (например, алгебраические действия) позволяет распространить эти операции на функции из произвольного фиксированного множества $E \subset \mathbb{R}$. При этом за результат такой операции над функциями принимают функцию из $E \subset \mathbb{R}$, определённую следующими условиями: её областью определения служат множество всех тех элементов x из E , в которых все участвующие в операции функции определены и соответствующая операция над их значениями в x выполняется, значение же функции в каждой точке x равно результату этой операции.

Например, поскольку любые два действительных числа имеют сумму и произведение, над суммой функций f и g из $E \subset \mathbb{R}$ понимают функцию из $E \subset \mathbb{R}$, обозначаемую $f+g$ и определённую следующими условиями: 1) $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ и 2) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ для всех $x \in D_{f+g}$. Аналогично определяют произведение $f \cdot g$ функций f и g посредством условий: 1) $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$ и 2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ для всех $x \in D_{f \cdot g}$. С другой стороны, частное двух чисел определено, если делитель отличен от нуля. Поэтому частным функций f и g называют функцию, обозначаемую $\frac{f}{g}$ и f/g , и определённую условиями: 1) $D_{f/g} = D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\}$ и 2) $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ для всех $x \in D_{f/g}$.

В результате операций над функциями можно получить функцию с пустой областью определения. Например, если $f(x) = \sqrt{x-2}$ и $g(x) = \sqrt{1-x}$, то $D_f = [2, +\infty)$, $D_g = (-\infty, 1]$ и поэтому $D_{f/g} = D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\} = \emptyset$. Такие функции (вида $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{1-x}}$) не представляют интереса

В действительном, как правильно, рассматриваться не будут. Ойтенити, однако, что выражение $\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$, в отличие от $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{1-x}}$, имеет ненулевую область определения $(1, 2]$.

5.7. График функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (график числовой функции)

Координатные прямые, определяющие декартову систему координат на евклидовой плоскости, неравноправны: одна из них играет роль "оси абсцисс", а другая — "оси ординат", и поменяв их роли, не изменив самих координатных прямых, получим другую систему координат. Обычно ось абсцисс считается первой, а ось ординат — второй из осей координат. Таким образом, ось составляет упорядоченную пару прямых. Соответственно этому и декартова координатная плоскость образует упорядоченную пару действительных чисел, первое из которых является абсциссой точки, а второе — ордината. Итак, выбирая на евклидовой плоскости декартову систему координат, каждой точке плоскости сопоставим упорядоченную пару действительных чисел её координат. При этом, если точкам M_1 и M_2 сопоставлены соответственно пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и $M_1 \neq M_2$, то, как следует из геометрического определения координат, также $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$; т.е., $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$. Наконец, из аксиом евклидовой плоскости следует, что каждой упорядоченной паре действительных чисел есть пара координат некоторой точки плоскости. Таким образом, введением на плоскости декартовой системы координат устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех упорядоченных пар действительных чисел. Последнее множество есть не что иное, как декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ множества $\mathbb{R}$ на себя. Основываясь на указанном взаимно-однозначном соответствии, само $\mathbb{R}^2$ называют иногда плоскостью, а пары (x, y) — её точками.

Евклидову плоскость с выбранной на ней прямоугольной системой координат будем (по аналогии с координатной прямой) называть координатной плоскостью. Её широко используют для изображения функций и их "графиков".

График Γ_f функции f из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (числовой функции f) называют, изображая каждую пару $(x, y) \in f$ соответствующей точкой $M(x, y)$ координатной плоскости. Таким образом, графиком функции f из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ называется совокупность точек $M(x, f(x))$, $x \in D_f$, координатной плоскости; т.е., множество всех её точек $M(x, y)$ удовлетворяющих уравнению $y = f(x)$ или $\Gamma_f = \{(x, y); y = f(x), x \in D_f\}$. Понятно, что соответствие между функцией из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и её графиком на одной и той же координатной плоскости взаимно-однозначно.

8

Из определения функции, как однозначного соответствия, следует, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции тогда и только тогда, когда прямая, параллельная оси ординат, пересекает это множество не более чем в одной точке.

5.8. Постоянные функции (отображения).

Так называют функции, принимающие одно и то же значение для всех значений аргумента.

Графиком постоянной числовой функции служит прямая, параллельная оси абсцисс, или часть такой прямой. Постоянные функции нельзя исключить из рассмотрения, так как сумма двух непостоянных функций может быть постоянной функцией. Например, как известно, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, так что поскольку $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ суть функции и сумма двух функций есть функция, то единицу, стоящую в правой части этого равенства, нужно рассматривать здесь не как число, а как обозначение постоянной функции со значением 1. Такое отождествление числа с соответствующей постоянной функцией полезно и в случае, где оно не обязательно. Так, функцию $3x + 5$ часто удобно рассматривать как сумму функций $3x$ и 5 .

5.9. Ограниченные функции.

Из различных типов поведения функций мы выделим в этом пункте и ниже свойства ограниченности и монотонности и свойства четности и нечетности функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (или числовых функций). Остальные типы поведения числовых функций будут рассмотрены по мере их появления.

Определение 4. Числовую функцию f называют ограниченной снизу (ограниченной сверху) на числовом множестве E , если можно указать такое число p (число q), что $f(x) \geq p$ ($f(x) \leq q$) для всех $x \in E$. Числовую функцию f называют ограниченной на множестве E , если f ограничена снизу и сверху на E .

В частности, в определении 4 можно выбрать $E = D_f$ и говорить об ограниченных снизу (сверху) и просто ограниченных функциях в областях их определений.

Из определения 4 следует, что числовая функция f ограничена снизу (ограничена сверху) или просто ограничена на числовом множестве E в том и только в том случае, когда числовое множество $f(E) = \{f(x); x \in E \cap D_f\}$ ограничено снизу (ограничено сверху) или просто ограничено в $\mathbb{R}$.

Опираясь на теорему 1 пункта 2.5, § 2, убеждаемся, что числовая функция f ограничена на множестве E тогда и только тогда, когда можно указать такое положительное число $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ для всех $x \in E$. Из этого наблюдения и свойств абсолютной величины действительного числа легко следует, что сумма и произведение двух ограниченных функций будут ограниченными функциями.

Примерами ограниченных функций служат все постоянные функции; степенная функция x^n , $n \in \mathbb{N}$, ограничена на любом отрезке $[a, b]$ из $\mathbb{R}$, так как $|x^n| \leq \max(|a^n|, |b^n|)$ для всех $x \in [a, b]$.

Обратная определенная 4, заключаем, например, что числовая функция f неограничена на множестве $E \subset D_f$ в том и только в том случае, когда для произвольного положительного числа $M > 0$ можно указать такое значение аргумента $x_M \in E$, в котором $|f(x_M)| > M$.

Упражнение 1. Сформулируйте обращения остальных свойств из определения 4.

5.10. Чётные и нечётные функции.

Свойства чётности и нечётности относятся к числовым функциям, область определения которых симметрична относительно точки $x=0$ (т.е., если $x \in D_f$, то и $-x \in D_f$). Так, функцию f называют чётной, если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D_f$, и нечётной, если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D_f$.

Например, степенная функция x^n , $n \in \mathbb{N}$, чётная, если её степень n — чётное число, и нечётная, если её степень n — нечётное число.

Утверждение 1. График чётной функции симметричен относительно оси ординат; т.е., вместе с каждой его точкой $M(x, y)$ ему принадлежит и точка $M'(-x, y)$ (см. рис. 8).

Δ Если $f(x)$ — чётная функция и $x \in D_f$, то $-x \in D_f$ и $f(-x) = f(x)$, $(-x, f(x)) = (-x, f(-x)) \in \Gamma_f$. Δ

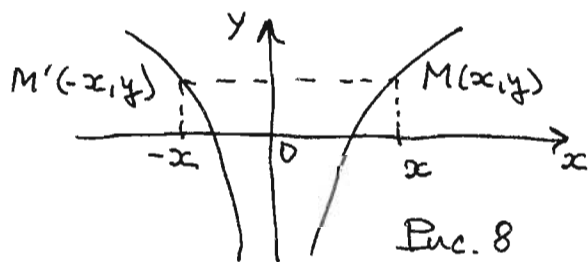
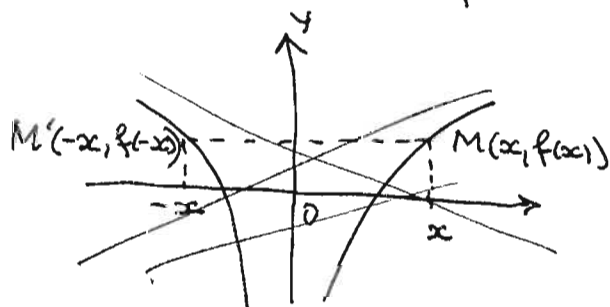


Рис. 8

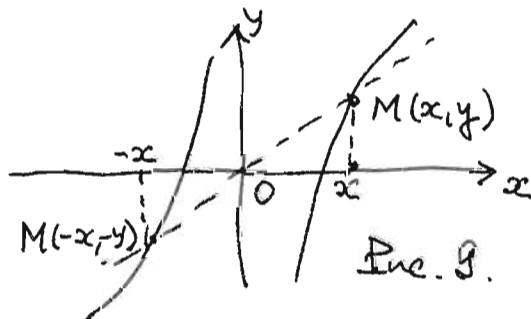


Рис. 9

Утверждение 2. График нечётной функции симметричен относительно начала координат; т.е., вместе с каждой его точкой $M(x, y)$ графику принадлежит и точка $M'(-x, -y)$ (см. рис. 9).

Δ Если $f(x)$ — нечётная функция и $x \in D_f$, то $-x \in D_f$ и $f(-x) = -f(x)$, $(-x, -f(x)) = (-x, f(-x)) \in \Gamma_f$. Δ

Упражнение 2. Пусть каждая из функций f и g чётная или нечётная. Что можно сказать о функциях $f+g$, $f-g$, f/g ?

Теорема 2. Функции f , область определения которой симметрична относительно точки $x=0$, представима, и притом единственным образом, в виде суммы чётной и нечётной функций, имеющих ту же область определения, что и f .

$\triangle$ Для всех $x \in D_f$ справедливо равенство

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad (3)$$

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad (4)$$

при этом $D_g = D_h = D_f$. Заменяя в формулах (4) x на $-x$, получим

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x), \quad h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x),$$

так что g — чётная функция, h — нечётная функция и (3) — есть требуемое представление функции f .

Обратно, пусть для всех $x \in D_f$ справедливо равенство (3), где $D_g = D_h = D_f$ и g — чётная функция, h — нечётная функция. Для любого $x \in D_f$ тогда имеем

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \quad (5)$$

и рассматривая (3) и (5) как уравнение относительно g и h , получаем для g и h выражение (4). $\triangle$

Упражнение 3. Показать, что алгебраический многочлен ~~есть чётная (нечётная)~~ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ есть чётная (нечётная) функция тогда и только тогда, когда коэффициенты при всех нечётных (чётных) степенях равны нулю (т.е. a_0 считается коэффициентом при нулевой степени x^0).

5.11. Монотонные функции.

Числовую функцию f (функцию из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$) называют возрастающей (строго возрастающей) на множестве $E \subset D_f$, если для всех $x_1, x_2 \in E$ удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) и f называют убывающей (строго убывающей) на множестве $E \subset D_f$, если для всех $x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Будем называть f монотонной (строго монотонной) на E , когда она на E возрастающая или убывающая (строго возрастающая или строго убывающая). Наконец, употребляя указанные термины без упоминания множества E , условием подразумевать, что $E = D_f$.

При обычном расположении осей координат участки строгого возрастания (строгого убывания) функции характеризуются падением (ступенем) её графика.

Пример 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если n нечётно, то x^n — строго возрастающая функция (рис. 10а). Если n чётно, то x^n — строго возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и строго убывающая на $(-\infty, 0]$ (рис. 10б).

$\triangle$ Действительно, если $0 \leq x_1 < x_2$, то $0 \leq x_1^n < x_2^n$ для всех n . Если $x_1 < x_2 \leq 0$, т.е., $0 \leq -x_2 < -x_1$, то $0 \leq (-x_2)^n < (-x_1)^n$, откуда $0 \leq (-1)^n x_2^n < (-1)^n x_1^n$ и $x_2^n < x_1^n$ при нечётном n и $x_2^n < x_1^n$ при чётном n . Наконец, если $x_1 < 0 < x_2$ и n нечётное, то $x_1^n < 0 < x_2^n$. $\triangle$

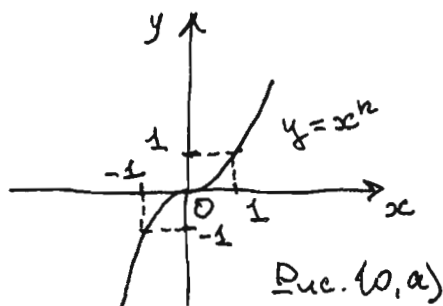


Рис. 10, а)

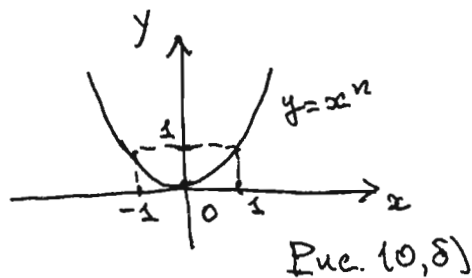


Рис. 10, б)

Пример 2. Функция $[x]$ (целая часть числа x) - возрастающая, но не строго возрастающая.

Δ Действительно, так как $[x]$ - наибольшее целое число, не превосходящее x , то из условия $x_1 < x_2$ следует $[x_1] \leq x_1 < x_2$; т.е., $[x_1] < x_2$, откуда $[x_1] \leq [x_2]$; при этом, если $m \leq x_1 < x_2 < m+1$, где m - целое, то $[x_1] = [x_2] = m$ (график функции $y = [x]$ изображён на рис. 4). ▽

Утверждение 3. Функция f , монотонная, но не строго монотонная на промежутке I , имеет на нём участки постоянства.

Δ Рассмотрим случай, когда f возрастает, но не строго возрастает на промежутке I . Тогда в I имеются такие точки x_1 и x_2 , что $x_1 < x_2$, а $f(x_1) = f(x_2)$. Так как отрезок $[x_1, x_2]$ целиком содержится в промежутке I и $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ для всех $x \in [x_1, x_2]$, то f на отрезке $[x_1, x_2]$ постоянна.

Случай убывающей, но не строго убывающей функции f на промежутке I рассматривается аналогично. ▽

Очевидно, единственные функции, одновременно возрастающие и убывающие на множестве E суть постоянные на E . Либо также, что если f - возрастающая (строго возрастающая) функция, то $(-f)$ - убывающая (строго убывающая).

Упражнение 4. Сумма возрастающих функций - возрастающая, а если хотя бы одна из них строго возрастающая, то - строго возрастающая функция. То же верно для произведения положительных возрастающих функций. Аналогичные утверждения справедливы для убывающих функций.

Упражнение 5. Композиция строго монотонных функций f и g - строго монотонная функция, причем возрастающая, если они обе возрастают или обе убывают, и убывающая, если одна из них возрастает, а другая - убывает.

Общие признаки возрастания и убывания функций установлены в дифференциальном исчислении.

Глава 2. Теория пределов.

В этой главе изучается одно из основных понятий математического анализа — понятие предельного перехода. Это понятие раскрывается здесь только в двух конкретных своих реализациях: предела числовой последовательности и предела функции в точке. В полных университетских курсах математического анализа изучается общая теория предела в форме предела функции по базису фильтра.

§ 1. Предел числовой последовательности.

1.1. Числовые последовательности.

Отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ всего множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел в произвольное множество X называют последовательностью в X . Обозначение: (a_n) , $a_n = f(n) \in X, n \in \mathbb{N}$; или, короче, (a_n) .

Точки $a_n \in X, n \in \mathbb{N}$, называют членами (или элементами) последовательности (a_n) ; элемент a_n называют общим членом последовательности.

Если $X = \mathbb{R}$, то числовая функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ определяет числовую последовательность (a_n) , $a_n = f(n) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ числовое множество, порождённое числовой последовательностью (a_n) ; т.е., $A = R_f$ для функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$. Специально подчеркнём, что если $a_k = a_l$ для некоторых индексов $k, l \in \mathbb{N}, k \neq l$, то в множестве A число $a_k = a_l$ входит один раз.

Пример 1. Числовая последовательность (a_n) называется постоянной, если она определяется постоянной функцией $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = c_n = c, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Множество C значений постоянной последовательности (c_n) состоит из единственного числа $\{c\} = C$.

Если числовые последовательности (a_n) и (b_n) определены функциями $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; т.е., $a_n = f(n), b_n = g(n), n \in \mathbb{N}$, то функция $h = f + g$ порождает числовую последовательность $(c_n), c_n = h(n), n \in \mathbb{N}$, называемую суммой последовательностей (a_n) и (b_n) и обозначаемую $(a_n + b_n)$, поскольку $c_n = h(n) = f(n) + g(n) = a_n + b_n, n \in \mathbb{N}$. Аналогично, функция fg определит числовую последовательность $(a_n b_n)$, называемую произведением последовательностей (a_n) и (b_n) ; в частности, если функция g постоянная, $g(n) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, то функция fg определит последовательность (λa_n) — произведение последовательности (a_n) на постоянную последовательность (λ) .

Числовую последовательность (a_n) называют ограниченной сверху (или ограниченной, если соответственно ограничено сверху (ограничено снизу) или ограничено множество A её значений). Таким образом, на основании результатов из § 2 главы 1, числовая последовательность (a_n) ограничена сверху (ограничена снизу) или ограничена, тогда и только тогда, когда существует число $q \in \mathbb{R}$ (число $p \in \mathbb{R}$), что для всех индексов $n \in \mathbb{N}$ верны

неравенства $a_n \leq q$ ($p \leq a_n$) или $p \leq a_n \leq q$. Кроме того, числовая последовательность (a_n) ограничена тогда и только тогда, когда существует некоторое число $M > 0$, что $|a_n| \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Бесконечно малые последовательности.

Определение 1. Числовую последовательность (α_n) называют бесконечно малой (б.м.) последовательностью, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всех индексов $n \geq N$.

Наличие индекса ε в обозначении числа $N_\varepsilon = N$ означает, что выбор этого числа в определении 1, вообще говоря, зависит от числа $\varepsilon > 0$.

Постоянная последовательность (δ_n) , $\delta_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, является б.м. последовательностью, поскольку для любого числа $\varepsilon > 0$ неравенство $|\delta_n| = 0 < \varepsilon$ верно для всех индексов $n \in \mathbb{N}$ (в этом случае в определении 1 число $N = 1$ для всех чисел $\varepsilon > 0$).

Утверждение 1. Постоянная последовательность будет б.м. последовательностью в том и только в том случае, когда её значение равно нулю.

Δ Условие достаточности в этом утверждении только что проверено выше. Предположим теперь, что существует постоянная б.м. последовательность (α_n) , $\alpha_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, со значением $\alpha \neq 0$. Тогда $|\alpha| > 0$, и для числа $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2} > 0$, согласно определению 1, существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. В частности, $|\alpha| = |\alpha_N| < \varepsilon = \frac{|\alpha|}{2}$, откуда $1 < \frac{1}{2}$, поскольку $|\alpha| > 0$. Но неравенство $1 < \frac{1}{2}$ невозможно, что завершает доказательство утверждения 1. ▽

Пример 2. Последовательность $(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, бесконечно мала.

Δ Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$ и натуральное число $N = [1/\varepsilon] + 1$, где $[1/\varepsilon]$ — целая часть числа $1/\varepsilon > 0$. Так как $[1/\varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon} < [1/\varepsilon] + 1 = N$, то для всех натуральных $n \geq N$ справедливо неравенство $n \geq N > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $0 < 1/n < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Тогда $|1/n| = 1/n < \varepsilon$ для всех $n \geq N$, и по определению 1, последовательность $(\frac{1}{n})$ бесконечно мала. ▽

Теорема 1. Всякая б.м. последовательность ограничена.

Δ Рассмотрим произвольную б.м. последовательность (α_n) и число $\varepsilon_0 = 1 > 0$. Согласно определению 1, неравенство $|\alpha_n| < 1$ становится справедливым для всех индексов $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого индекса N_0 (т.е. для всех $n \geq N_0$). Обозначим $C = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N_0}|, 1\}$. Тогда $C \geq 1 > 0$ и $|\alpha_n| \leq C$ для всех $n \in \mathbb{N}$; т.е., последовательность (α_n) ограничена. ▽

Теорема 2. Алгебраическая сумма двух б.м. последовательностей есть б.м. последовательность.

Δ Рассмотрим две произвольные б.м. последовательности (α_n) и (β_n) , их алгебраическую сумму $(\alpha_n \pm \beta_n)$ и произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно определению 1, существуют такие числа $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, что $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geq N_1$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geq N_2$. Если $N = \max(N_1, N_2)$

то неравенства $|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ становится верным для всех индексов $n \geq N$, и значит, $(\alpha_n \pm \beta_n)$ — д.м. последовательности. $\triangleright$

Теорема 3. Произведение д.м. последовательности и ограниченной последовательности образует д.м. последовательность.

Пусть (α_n) — д.м. последовательность и (β_n) — ограниченная последовательность. Тогда существует такое число $M > 0$, что $|\beta_n| \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению 1, существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что $|\alpha_n| < \varepsilon/M$ для всех индексов $n \geq N$. Поэтому неравенства $|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| \leq M |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ становится верным для всех $n \geq N$, так что, опять по определению 1, $(\alpha_n \beta_n)$ — д.м. последовательность. $\triangleright$

Следствие 1. Произведение двух (а следовательно, и любого числа) д.м. последовательностей есть д.м. последовательность (ибо каждое из слагаемых в силу теоремы 1 образует ограниченную последовательность).

Следствие 2. Любая линейная комбинация двух (а следовательно, и любого числа) д.м. последовательностей образует д.м. последовательность.

Рассмотрим произвольные д.м. последовательности (α_n) и (β_n) , произвольные числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и линейную комбинацию $(\lambda_1 \alpha_n + \lambda_2 \beta_n)$ последовательностей (α_n) и (β_n) . Так как числовые последовательности (λ_1) и (λ_2) ограничены, то по теоремам 3 и 2, $(\lambda_1 \alpha_n + \lambda_2 \beta_n)$ — д.м. последовательность. $\triangleright$

Теорема 4. Последовательность (α_n) будет д.м. последовательностью в том и только в том случае, когда последовательность $(|\alpha_n|)$, составленная из абсолютных величин $|\alpha_n|$ членов исходной последовательности (α_n) , есть д.м. последовательность.

Утверждение теоремы непосредственно следует из определения 1, если заметить, что $||\alpha_n|| = |\alpha_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. $\triangleright$

1.3. Сходящиеся числовые последовательности.

Рассмотрим произвольную числовую последовательность (a_n) .

Определение 2. Число $a \in \mathbb{R}$ называют пределом последовательности (a_n) , если последовательность (α_n) , $\alpha_n = a_n - a$, $n \in \mathbb{N}$, бесконечно мала. Обозначение: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (или, короче, $\lim a_n = a$).

Определение 3. Числовая последовательность, обладающая пределом, называется сходящейся (к своему пределу).

Определение 4. Числовая последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

Утверждение 2. Всякая постоянная последовательность сходится и имеет предел, равный значению этой последовательности.

Для произвольной постоянной последовательности (c_n) , $c_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность (γ_n) , $\gamma_n = c_n - c = 0$, $n \in \mathbb{N}$, — бесконечно мала, согласно утверждению 1. $\triangleright$

Теорема 5. Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Если последовательность (a_n) имеет $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, то, по определению 2, $a_n = a + \alpha_n$ и $a_n = b + \beta_n$, где (α_n) и (β_n) суть д.м. последовательности. Тогда $b - a = \alpha_n - \beta_n, n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме 2, последовательность $(\alpha_n - \beta_n)$ бесконечно малая, и следовательно постоянная последовательность $(b - a)$, будучи д.м., бесконечно мала, в силу утверждения 1, имеет $b - a = 0$, или $b = a$. $\square$

Непосредственным следствием теоремы 5 и определения 2 служит Теорема 6 (о представлении сходящейся последовательности). Числовая последовательность (a_n) имеет $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ тогда и только тогда, когда $a_n = a + \alpha_n, n \in \mathbb{N}$, где (α_n) — д.м. последовательность.

Следствие 3. Предел любой д.м. последовательности равен нулю. Для произвольной д.м. последовательности (α_n) имеем представление $\alpha_n = 0 + \alpha_n, n \in \mathbb{N}$, и $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ в силу предыдущей теоремы. $\square$

В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^p = 0$ для любого $p \in \mathbb{N}$, согласно следствию 1.

В заключение этого пункта отметим, что, объединив определение д.м. последовательности и предела последовательности с утверждением теоремы 6, получаем следующий критерий существования предела последовательности.

Теорема 7. Числовая последовательность (a_n) имеет $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N_\varepsilon$, что неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ справедливо для всех индексов $n \geq N$. Это свойство, помещенное в заключительной части теоремы 7, принимаем за определение предела числовой последовательности.

1.4. Свойство локальности предела последовательности.

Теорема. Если числовая последовательность имеет предел, то изменив или удалив в ней любое конечное число членов, получим сходящуюся последовательность, имеющую тот же предел, что и исходная последовательность. Пусть последовательность (a_n) имеет $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Рассмотрим последовательность (b_n) , которая получается из (a_n) изменением или удалением какого-либо конечного числа членов. Тогда можно указать такой индекс $N_1 \in \mathbb{N}$, что $b_n = a_n$ для всех индексов $n \geq N_1$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, то согласно критерию существования предела последовательности (теорема 7 пункта 1.3), существует такое натуральное число N_2 , что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех индексов $n \geq N_2$. Если выбрать $N = \max(N_1, N_2)$, то для любого $n \geq N$ имеем $|b_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon$, и значит, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

1.5. Свойство линейности предела последовательности.

Теорема. Произвольная линейная комбинация двух сходящихся числовых последовательностей образует сходящуюся последовательность, предел которой равен такой же линейной комбинации для пределов исходных последовательностей.

Пусть последовательности (a_n) и (b_n) имеют $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Рассмотрим произвольные числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и линейную комбинацию $(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)$ последовательностей (a_n) и (b_n) . Согласно теореме 6 о представлении сходящейся последовательности, имеем $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n, n \in \mathbb{N}$, где (α_n) и (β_n) суть

5.м. последовательности. Тогда

$$\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_1 \alpha_n + \lambda_2 \beta_n = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \gamma_n, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где $\gamma_n = \lambda_1 \alpha_n + \lambda_2 \beta_n, n \in \mathbb{N}$, и последовательность (γ_n) - бесконечно малая, в силу следствия 3 к теореме 3 пункта 1.2. Применяя теперь теорему о представлении сходящейся последовательности на основании формулы (1) заключаем, что $\lambda_1 a + \lambda_2 b = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)$.

Итак, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n) = \lambda_1 \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lambda_2 \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. Δ

В частности, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$, если существуют $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. Более того, для любого $\lambda \neq 0$ последовательности (a_n) и (λa_n) сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

1.6. Предел и неравенства.

Теорема (о сохранении неравенств). Если последовательность (a_n) имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ и $a > p$ ($a < q$) для некоторых чисел $p, q \in \mathbb{R}$, то найдётся такой индекс $N_1 \in \mathbb{N}$ (индекс $N_2 \in \mathbb{N}$), что также $a_n > p$ ($a_n < q$) для всех индексов $n \geq N_1$ (для всех индексов $n \geq N_2$).

Δ Пусть сначала $a > p$. Обозначим $\varepsilon_1 = a - p > 0$. Так как $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, то согласно критерию существования предела последовательности (утверждение 3 пункта 1.3), существует натуральное число N_1 , что $|a_n - a| < \varepsilon_1$ для всех индексов $n \geq N_1$, или $a - \varepsilon_1 < a_n < a + \varepsilon_1$ для всех $n \geq N_1$, откуда $a_n > a - \varepsilon_1 = a - (a - p) = p$ для всех $n \geq N_1$.

Пусть теперь $a < q$. Рассмотрим $\varepsilon_2 = q - a > 0$ и найдём такое натуральное число N_2 , что $|a_n - a| < \varepsilon_2$ для всех $n \geq N_2$, откуда $a_n < a + \varepsilon_2 = a + (q - a) = q$ для всех $n \geq N_2$. Δ

Теорема (о сохранении знака последовательности). Пусть последовательность (a_n) имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ и $a_n \geq 0$ для всех индексов n , начиная с некоторого $N_1 \in \mathbb{N}$ (т.е., для всех $n \geq N_1$). Тогда $a \geq 0$.

Δ Допустим, напротив, что $a < 0$. Согласно предыдущей теореме, существует такое число $N_2 \in \mathbb{N}$, что $a_n < 0$ для всех индексов $n \geq N_2$. Обозначим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда $a_n \geq 0$ (по условию теоремы) и $a_n < 0$ (по допущению). Последние неравенства несовместны, что и завершает доказательство теоремы. Δ

Теорема (о переходе к пределу в неравенствах или свойствах монотонности предела). Пусть последовательности (a_n) и (b_n) обладают свойством, что $a_n \leq b_n$ для всех индексов $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого индекса $N_1 \in \mathbb{N}$ (т.е., для всех $n \geq N_1$). Если существуют $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, то $a \leq b$.

Δ Рассмотрим последовательность (c_n) , $c_n = b_n - a_n, n \in \mathbb{N}$. Тогда $c_n \geq 0$ для всех $n \geq N_1$, и в силу свойства монотонности предела, существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b - a$. Согласно предыдущей

теореме о сохранении знака последовательности, $b-a \geq 0$ и $a \leq b$.

Важная замечание.

Пример последовательности $(1/n)$, у которой все члены $a_n = \frac{1}{n} > 0, n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, показывают, что в утверждениях двух последних теорем строгие неравенства обязаны сохраниться также и в случае, когда в их условиях вместо строгих неравенств стоят строгие неравенства.

1.7. Предел произведения последовательностей.

Теорема. Произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов сомножителей.

Пусть последовательности (a_n) и (b_n) имеют $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Тогда $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n, n \in \mathbb{N}$, где (α_n) и (β_n) — д.м. последовательности. Для произведения $(a_n b_n)$ имеем

$$a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n) = ab + \delta_n, n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где $\delta_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n, n \in \mathbb{N}$. Согласно следствию 2 к теореме 3 и самой теореме 3, все последовательности $(a\beta_n), (b\alpha_n), (\alpha_n\beta_n)$ и (δ_n) суть бесконечно малые, и следовательно, по теореме 6 о представлении сходящейся последовательности с учетом формулы (2), заключаем, что $ab = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n$.

Итак, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

1.8. Предел частного двух последовательностей.

Если числовые последовательности (a_n) и (b_n) определяются, соответственно, функциями $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; т.е., $a_n = f(n), b_n = g(n), n \in \mathbb{N}$, и дополнительно $g(n) \neq 0, n \in \mathbb{N}$, то функция f/g порождает числовую последовательность (a_n/b_n) , называемую частичной последовательностью (a_n) и (b_n) . Если при этом функция f постоянная и $f(n) = 1, n \in \mathbb{N}$, то образуемую b назовем последовательностью $(1/b_n)$ называем обратной для последовательности (b_n) .

Теорема (об ограниченности обратной последовательности). Если все члены последовательности (b_n) отличны от нуля и последовательность (b_n) имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b, b \neq 0$, то обратная последовательность $(1/b_n)$ ограничена.

Считаем сначала, что $b > 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b > \frac{b}{2} > 0$. По теореме о сохранении неравенств, существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что $b_n > \frac{b}{2} > 0$ для всех индексов $n \geq N$, или $0 < \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$ для всех $n \geq N$. Рассмотрим числа $q = \max\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_N}, \frac{2}{b}\}$ и $p = \min\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_N}, 0\}$. По определению эти числа, $p \leq \frac{1}{b_n} \leq q$ для всех индексов $n \in \mathbb{N}$; т.е., последовательность $(1/b_n)$ ограничена.

Если $b < 0$, то, по доказанному, ограничена последовательность $(-\frac{1}{b_n})$, поскольку, в силу линейного свойства, последовательность $(-b_n)$ имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-b_n) = -b > 0$. Так как $|1/b_n| = |-1/b_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то ограничена и последовательность $(1/b_n)$.

Теорема (о пределе частного последовательностей). Пусть последовательности (a_n) и (b_n) имеют $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Если $b \neq 0$ и $b_n \neq 0$ для всех индексов $n \in \mathbb{N}$, то последовательность (a_n/b_n) имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = c$ и $c = \frac{a}{b}$.

4 Согласно теореме о представлении сходящейся последовательности, $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $(\alpha_n), (\beta_n)$ — д.м. последовательности.

тогда
$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{b \cdot b_n} = \frac{1}{b_n} \alpha_n - \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \beta_n = \gamma_n, n \in \mathbb{N}. (3)$$

По предвзвешенной теореме последовательности $(\frac{1}{b_n})$ и $(\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b_n})$ ограничены. Следовательно, согласно свойствам д.м. последовательностей, последовательности $(\frac{1}{b_n} \alpha_n)$, $(\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \beta_n)$ и (γ_n) бесконечно малы. По теореме о представлении сходящейся последовательности, из соотношения (3) теперь следует, что $a/b = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n$.

Итак,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}. \triangleright$$

Следствие. Если (b_n) имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ и $b \neq 0, b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, то $(1/b_n)$ имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/b_n = 1/b$.

4 Постоянная последовательность $(a_n), a_n = 1, n \in \mathbb{N}$, имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

1.3. Оценочный признак существования предела последовательности.

Теорема. Если последовательности $(a_n), (b_n)$ и (c_n) обладают свойствами:

1°. существует такое натуральное N_1 , что неравенства $a_n \leq c_n \leq b_n$ справедливы для всех индексов $n \geq N_1$;

2°. существующий $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, и 3°. $a = b$,
то существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c$ и $c = a = b$.

4 Рассмотрим $c = a = b$ и произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу условий 2° и 3° теоремы и критерия существования предела последовательности, найдётся такое натуральное N_2 , что

$$c - \varepsilon = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = c + \varepsilon \text{ для всех } n \geq N_2, (4)$$

и найдётся такое натуральное N_3 , что

$$c - \varepsilon = b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon = c + \varepsilon \text{ для всех } n \geq N_3. (5)$$

Обозначим $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Тогда для всех $n \geq N$ выполняются условия 1° теоремы и утверждения (4) и (5), на основании которых заключаем, что $c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$ для всех $n \geq N$, или $|c_n - c| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Последнее, согласно критерию существования предела последовательности, означает, что $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$. $\triangleright$

Примеры.

1°. $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

4 Утверждение справедливо для $q = 0$, поскольку в этом случае $q^n = 0, n \in \mathbb{N}$, и постоянная последовательность (0) имеет $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Если $q \neq 0$, то $0 < |q| < 1$ и $0 < q < 1$ или $-1 < q < 0$. В случае $0 < q < 1$ имеем $1/q > 1$ и по неравенству Бернулли

$$(1/q)^n = (1 + 1/q - 1)^n \geq 1 + n(1/q - 1) \geq \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$$

откуда

$$0 < q^n = \frac{1}{(1/q)^n} < \frac{1}{1/2 - 1} \cdot \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}. (6)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{q}-1} \cdot \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0$, то на основании (6) и оценочного признака существования предела заключаем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

В случае $-1 < q < 0$ имеем $0 < |q| < 1$ и, по доказанному, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$. Поскольку $|q^n| = |q|^n$ для любых $q \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, и последовательность $(|q^n|)$ бесконечно мала, то в силу теоремы 4 пункта 1.2, бесконечно мала является также последовательность (q^n) ; т.е., $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. $\triangleright$

2°. Для любого числа $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Обозначим $a_n = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$. Если $a = 1$, то $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. Если $a \neq 1$, то $a > 1$ или $0 < a < 1$. Пусть $a > 1$. Тогда $a_n = \sqrt[n]{a} > 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $a_n = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно неравенству Бернулли, $a = (a_n)^n = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n > n\alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, откуда

$$0 < \alpha_n < \frac{a}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0$, то, на основании (*) и оценочного признака существования предела, заключаем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$. Поэтому, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \alpha_n) = 1$.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1/a}} = \frac{1}{1} = 1$. $\triangleright$

1.10. Предел монотонной последовательности.

Числовую последовательность (a_n) называют возрастающей (строго возрастающей), если порождающая её функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, возрастает (строго возрастает) на $\mathbb{N} = Df$; т.е., если $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Числовую последовательность (a_n) называют убывающей (строго убывающей), если порождающая её функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, убывает (строго убывает) на $\mathbb{N} = Df$; т.е., $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Возрастающие, строго возрастающие, убывающие, строго убывающие последовательности называются монотонными последовательностями.

Теорема 1 (К. Вейерштрасс). Всякая возрастающая и ограниченная сверху последовательность сходится.

Рассмотрим произвольную возрастающую и ограниченную сверху последовательность (a_n) , так что $a_n \leq a_{n+1}$ и $a_n \leq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $q \in \mathbb{R}$. Таким образом, непустое множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ограничено сверху (числом q) и поэтому обладает суп A = a. Покажем, что $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Так как $a = \sup A$, то $a_n \leq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся $a_N \in A$, что $a - \varepsilon < a_N \leq a$. Тогда для любого индекса $n \geq N$, выполняется неравенство $a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$, или $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$, так что $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. $\triangleright$

Совершенно аналогично доказывался

Теорема 2 (К. Вейерштрасс). Всякая убывающая и ограниченная сверху последовательность сходится.

Рассмотрим произвольную убывающую и ограниченную сверху последовательность (a_n) , так что $a_n > a_{n+1}$ и $p \leq a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $p \in \mathbb{R}$. Таким образом, непустое множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ограничено снизу (числом p) и поэтому обладает $\inf A = a$. Покажем, что $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Так как $a = \inf A$, то по критерию точной нижней грани числового множества, $a \leq a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся $a_N \in A$, что $a \leq a_N < a + \varepsilon$. Тогда для любого индекса $n \geq N$ справедливо неравенство $a - \varepsilon < a \leq a_n \leq a_N < a + \varepsilon$, или $|a - a_n| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$, так что $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. $\triangleright$

1.11. Число e .

Теорема (Л. Эйлер). Последовательность (a_n) , $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится. $\triangleleft$ Рассмотрим последовательность (b_n) , $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, так что $b_n = (1 + \frac{1}{n}) a_n$, $n \in \mathbb{N}$, и докажем, что существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ и $b \geq 2$. Тогда заключаем, что существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{b}{1} = b$. Прежде всего заметим, что для всех $n \geq 2$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n-1})^n} = (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})^n (\frac{n-1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n^2})^n, n \geq 2.$$

Согласно неравенству Бернулли $(1 + \frac{1}{n^2})^n > 1 + n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = (1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n^2})^n \leq (1 + \frac{1}{n^2})^n (1 - \frac{1}{n^2})^n = (1 - \frac{1}{n^2})^n < 1, n \geq 2,$$

и следовательно, (b_n) строго убывает, начиная со второго члена. Опять используя неравенство Бернулли, заключаем, что $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2$ для всех $n \in \mathbb{N}$; и.е., (b_n) ограничена снизу числом 2. Согласно теореме 2 Вейерштрасса и свойству локальности предела, существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. При этом, по свойству монотонности предела, $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \geq 2$. $\triangleright$

Определение 5. Число $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ имеет специальное обозначение " e ", и.е., $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ (латинская буква e - первая буква фамилии Л. Эйлера (L. Euler)); $e = 2,718\dots$.

Число e играет фундаментальную роль в математике.

1.12. Принцип стягивающихся отрезков.

Определение 6. Отрезки $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ образуют систему вложенных отрезков, если для всех индексов $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

Другими словами, если обозначить $\Delta_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, то $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n, n \in \mathbb{N}$. Более того, если индексы $p, q \in \mathbb{N}$ связаны отношением $p \leq q$, то $\Delta_q \subset \Delta_p$ и $a_p \leq a_q \leq b_q \leq b_p$.

Определение 7. Систему $\Delta_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, вложенных отрезков называют системой стягивающихся отрезков, если $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Delta_n| = 0$, где $|\Delta_n|$ обозначает длину отрезка Δ_n и $|\Delta_n| = b_n - a_n, n \in \mathbb{N}$.

Теорема (принцип стягивающихся отрезков). Если отрезки $[a_n, b_n] = \Delta_n, n \in \mathbb{N}$, образуют систему стягивающихся отрезков, то их пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ состоит из единственной точки $\{c\}$, причём $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Рассмотрим множества $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ и покажем, что они связаны отношением $A \leq B$. Действительно, рассмотрим произвольные $a_k \in A$ и $b_l \in B$ и положим $m = \max(k, l)$. Видно, что $\Delta_m \subset \Delta_k$ и $\Delta_m \subset \Delta_l$, так что $a_k \leq a_m \leq b_m \leq b_l$. Теперь, по аксиоме непрерывности множества $\mathbb{R}$, существует число $c \in \mathbb{R}$, что $A \leq c \leq B$ и, в частности, $a_n \leq c \leq b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ не пусто и содержит число c . Если также $c_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, то $a_n \leq c_1 \leq b_n, n \in \mathbb{N}$, и $|c - c_1| \leq b_n - a_n, n \in \mathbb{N}$, откуда по оценочному признаку существования предела, заключаем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} |c - c_1| = 0$ и $c_1 = c$.

Итак, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ состоит из единственного элемента $\{c\}$. При этом $a_n \leq c \leq b_{n+1} \leq b_n, n \in \mathbb{N}$, и следовательно, возрастающая последовательность (a_n) ограничена сверху числом c , а убывающая последовательность (b_n) ограничена снизу числом c . По теореме Вейерштрасса о пределе монотонных последовательностей, существуют $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$ и $a_n \leq a \leq c \leq b \leq b_n, n \in \mathbb{N}$. Поскольку $0 \leq b - a \leq b_n - a_n, n \in \mathbb{N}$, и $\lim (b_n - a_n) = 0$, то, по оценочному признаку существования предела, $b - a = 0$, и значит, $a = b = c$. $\triangleright$

Замечание. Доказанная теорема перестала бы быть справедливой для системы стягивающихся интервалов, как показывает такой пример. Интервалы $I_n = (0, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$, обладают свойствами $I_{n+1} \subset I_n, n \in \mathbb{N}$, и $(b_n), b_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, имеют $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Однако интервалы $I_n, n \in \mathbb{N}$, не содержат ни одной общей точки, поскольку все отрицательные числа и число нуль не входят в $I_n, n \in \mathbb{N}$, по определению, а для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ в силу свойства архимедовости множества $\mathbb{R}$ существует такое натуральное n , что $n > \frac{1}{\varepsilon}$, или $\varepsilon > \frac{1}{n}$, и поэтому число ε не входит в интервал $I_n = (0, \frac{1}{n})$. Таким образом, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

1.13. Частичные пределы последовательности.

Пусть числовая последовательность (a_n) задается функцией $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную строго возрастающую функцию $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(k) = n_k$, $k, n_k \in \mathbb{N}$. Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо $n_{k+1} = g(k+1) > g(k) = n_k$, $k \in \mathbb{N}$, и $n_1 = g(1) \geq 1$, $n_2 > n_1 \geq 1$, то $n_2 \geq 2$ и, по индукции, $n_k \geq k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Композиция $f \circ g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ определяет новую последовательность, членами которой являются числа $f(g(k)) = f(n_k) = a_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательность (a_{n_k}) назовем подпоследовательностью последовательности (a_n) , так как тождественная функция $j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $j(k) = k$, $k \in \mathbb{N}$, строго возрастает на $\mathbb{N}$ и $f \circ j = f$, то сама последовательность (a_n) является своей подпоследовательностью.

Определение 8. Число $c \in \mathbb{R}$ назовем частичным пределом последовательности (a_n) , если $c = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности (a_{n_k}) последовательности (a_n) .

Теорема 3. Если (a_n) имеет $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то любая подпоследовательность (a_{n_k}) имеет $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

△ Рассмотрим произвольную подпоследовательность (a_{n_k}) , $n_k \geq k$, $k \in \mathbb{N}$, и произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, то существует такое натуральное N , что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, имеем $n_k \geq k \geq N$ и $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$; т.е., $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$. ▽

Теорема 4. Для того, чтобы $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, необходимо и достаточно, ~~чтобы~~ выполнение двух равенств: $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$ и $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$.

△ Необходимость установлена предыдущей теоремой 3.

Докажем достаточность. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$, то можно указать такое натуральное N_1 , что

$$|a - a_{2k+1}| < \varepsilon \text{ справедливо для всех } k \geq N_1. \quad (8)$$

Так как $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$, то можно указать такое натуральное N_2 , что

$$|a - a_{2k}| < \varepsilon \text{ справедливо для всех } k \geq N_2. \quad (9)$$

Положим $N = \max(2N_1 + 1, 2N_2)$. Тогда для любого $n \geq N$ будет выполнено (8) (если n нечетное) и (9) (если n четное), и поэтому $|a_n - a| < \varepsilon$; т.е.,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad \triangleright$$

Последняя теорема позволяет прояснить вопрос о связи между сходящимися и ограниченными последовательностями. Как установлено в пункте 1.3, всякая сходящаяся последовательность ограничена. С другой стороны, нижеследующий простой пример показывает, что

не любая ограниченная последовательность сходящаяся. Последовательность (a_n) , $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена, поскольку $|a_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, имеет сходящиеся подпоследовательности (a_{2k}) , $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$, и (a_{2k+1}) , $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -1$, но (a_n) не имеет предела в силу теоремы 4, так как $1 \neq -1$.

1.14. Теорема Больцано для последовательностей.

В конце предыдущего пункта приведен пример ограниченной последовательности, не имеющей предела; однако, у этой последовательности существуют сходящиеся подпоследовательности. Оказывается, это свойство присуще любой ограниченной последовательности.

Теорема (Б. Больцано). Каждая ограниченная последовательность содержит хотя бы одну сходящуюся подпоследовательность.

* Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность (a_n) . Тогда существуют $p, q \in \mathbb{R}$, что $p \leq a_n \leq q$ для всех индексов $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\Delta_0 = [p, q]$ и $a_n \in \Delta_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Разделим отрезок Δ_0 на две равные части отрезка. Тогда хотя бы одна из половинок обладает тем свойством (обозначим его символом α), что индексы входящих в неё элементов последовательности (a_n) образуют бесконечное множество (в противном случае множество всех индексов последовательности (a_n) оказалось бы конечным, а оно равно $\mathbb{N}$). Обозначим эту половину символом Δ_1 , имеем $\Delta_1 \subset \Delta_0$ и $|\Delta_1| = \frac{1}{2} |\Delta_0|$.

Разделим теперь отрезок Δ_1 на две равные части и обозначим Δ_2 ту половину в Δ_1 , которая обладает свойством α . Тогда $\Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$ и $|\Delta_2| = \frac{1}{2^2} |\Delta_0|$. Продолжая этот процесс, получим отрезки Δ_k , $k \in \mathbb{N}$, обладающие свойством $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$ и $|\Delta_k| = \frac{1}{2^k} |\Delta_0|$, а также одновременно свойством α . Так как вместе со свойством $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, $k \in \mathbb{N}$, имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} |\Delta_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} |\Delta_0| = |\Delta_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = |\Delta_0| \cdot 0 = 0$, то отрезки Δ_k , $k \in \mathbb{N}$, образуют систему суживающихся отрезков.

Обозначим $\Delta_k = [p_k, q_k]$, $k \in \mathbb{N}$, и, зная, что каждый Δ_k , $k \in \mathbb{N}$, обладает свойством α , выберем элемент $a_{n_1} \in \Delta_1$, элемент $a_{n_2} \in \Delta_2$ с $n_2 > n_1$, и вообще, для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, выберем $a_{n_k} \in \Delta_k$ с $n_k > n_{k-1}$. Получим подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n) , для которой $p_k \leq a_{n_k} \leq q_k$, $k \in \mathbb{N}$. Согласно принципу суживающихся отрезков, существуют $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = c$ и $c = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ в силу оценочного признака существования предела последовательности.

Теорема Больцано лежит в основе доказательства основного (фундаментального) критерия существования предела последовательности, и вообще, одного из фундаментальных результатов математики.

1.15. Критерий Коши существования предела последовательности.

Определение 9. Последовательность (a_n) называют фундаментальной последовательностью (или последовательностью Коши), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $N = N_\varepsilon$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для всех индексов $m, n \geq N$.

Теорема. Для того, чтобы последовательность (a_n) имела предел, необходимо и достаточно, чтобы (a_n) была фундаментальной последовательностью.

◀ Необходимость. По условию, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное $N = N_\varepsilon$, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geq N$. Следовательно, для любых $m, n \geq N$ справедливо

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

т.е., (a_n) - фундаментальная последовательность.

◀ Достаточность. Пусть (a_n) - фундаментальная последовательность. Рассмотрим $\varepsilon_0 = 1 > 0$. Согласно определению 9, существует натуральное N_0 , что $|a_n - a_m| < 1$, или $a_m - 1 < a_n < a_m + 1$ для всех $m, n \geq N_0$. В частности,

$$a_{N_0} - 1 < a_n < a_{N_0} + 1 \text{ для всех } n \geq N_0. \quad (10)$$

Неравенства (10) означают, что множество $A_{N_0} = \{a_{N_0}, a_{N_0+1}, \dots\}$ ограничено, а вместе с ним ограничено всё множество $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. По теореме Больцано, существует сходящаяся подпоследовательность (a_{n_k}) , $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как последовательность (a_n) фундаментальная, то существует натуральное N_1 , что

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } n, m \geq N_1. \quad (11)$$

Так как $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$, то существует натуральное K , что

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } k \geq K \quad (12)$$

Рассмотрим $N = \max(N_1, K)$ и произвольные $n \geq N, k \geq K$. Так как $n \geq N \geq N_1, k \geq N \geq K$ и $n_k \geq k \geq N \geq N_1$, то справедливы неравенства (11) и неравенство (12) с $m = n_k$. Поэтому

$$|a - a_n| = |\cancel{a - a_k} + a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n| \leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для любого $n \geq N$. Последнее означает, что $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. ▶

1.16. Бесконечно большие последовательности.

Определение 10. Последовательность (b_n) называют бесконечно большой (б.б.) последовательностью, если для любого числа $M > 0$ можно указать такое натуральное $N = N_M$, что $|b_n| > M$ для всех индексов $n \geq N$.

Теорема (о связи б.б. и б.м. последовательностей). Если (b_n) - бесконечно большая последовательность, то обратная последовательность $(\frac{1}{b_n})$ - бесконечно малая. Если (α_n) - бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, то обратная последовательность $(\frac{1}{\alpha_n})$ - бесконечно большая.

Пусть (b_n) - д.д. последовательность. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$ и число $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Согласно определению д.д. существует натуральное $N = N_M = N_\varepsilon$, что $|b_n| > M = \frac{1}{\varepsilon}$ для всех индексов $n \geq N$, откуда $b_n \neq 0, n \geq N$, и $|\frac{1}{b_n}| < \frac{1}{M} = \varepsilon$ для всех $n \geq N$, т.е. $(\frac{1}{b_n})$ - д.д. последовательность.

Пусть теперь (α_n) - д.д. последовательность и $\alpha_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, так что существует обратная последовательность $(\frac{1}{\alpha_n})$. Рассмотрим произвольное число $M > 0$ и число $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$. По определению д.д. последовательности, существует такое натуральное $N = N_\varepsilon = N_M$, что $|\alpha_n| < \varepsilon = \frac{1}{M}$ для всех индексов $n \geq N$, откуда $|\frac{1}{\alpha_n}| > \frac{1}{\varepsilon} = M$ для всех $n \geq N$, т.е. $(\frac{1}{\alpha_n})$ - д.д. последовательность.

1.17. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$.

Определение предела числовой последовательности в равносильной функции равносильно определению предела функции 1.3 допускает такую геометрическую иллюстрацию. Пусть $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, где $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$, и $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ - функция, порождающая последовательность (a_n) . На координатной прямой рассмотрим точку a , соответствующую числу a . Тогда утверждается, что для каждого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой индекс $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого все точки $a_n, n \geq N$, расположатся от точки a на расстоянии, меньшем ε , так как $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$.

Но последовательность (a_n) порождена некоторой функцией $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, график Γ_f которой состоит из множества точек $(n, f(n))$, $f(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, на координатной плоскости. Поэтому, факт существования предела $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$ допускает другую геометрическую иллюстрацию. Пусть, для определенности, $a \geq 0$. Тогда картина сходимости последовательности (a_n) к числу a воплоти примерно так, как изображено на рис. 11.

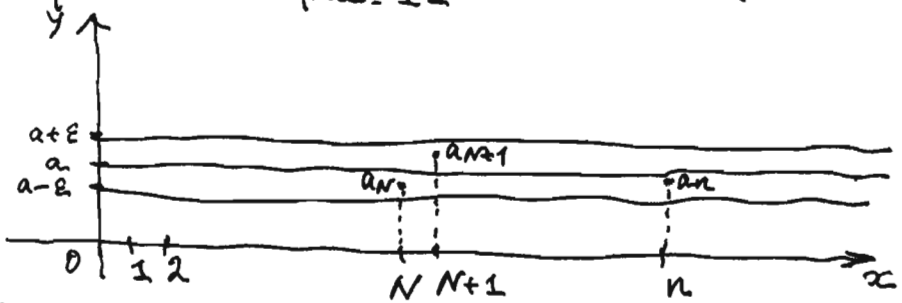


Рис. 11

Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon, n \geq N$, означает, что точки $(n, a_n) = (n, f(n))$ для всех больших индексов n лежат как угодно близко к прямой $y = a$.

Это наблюдение позволяет распространить понятие предела числовых последовательностей на числовые функции, области определения которых содержат некоторый бесконечный интервал $(b, +\infty), b \in \mathbb{R}$.

Определение 11. Пусть область определения D_f числовой функции f содержит некоторый интервал $(b, +\infty), b \in \mathbb{R}$. Число a называют пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число $b_\varepsilon > b$, что неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ становится верным для всех $x \geq b_\varepsilon (> b)$. Обозначение: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Геометрически илюстрация определению 1.1 (когда $a > 0$) (15)
предоставляет рис. 1.2.

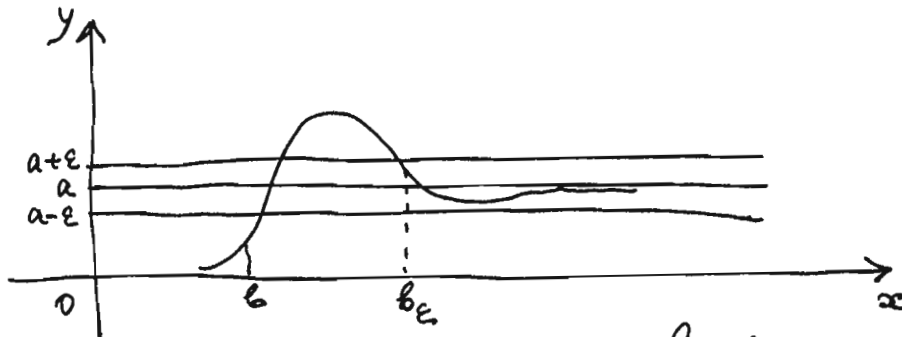


Рис. 1.2

Введённый определением 1.1 предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ обладает всеми свойствами, аналогичными тем, которыми обладает предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$; при этом сохраняющей формулировки свойств и их доказательства с единственной заменой в них символов a_n на $f(x)$, n на x и N_ε на b_ε .

Так, функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой (б.м.) функцией при $x \rightarrow +\infty$, если Δ_α содержит некоторый интервал $(b, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$, и для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число $b_\varepsilon > b$, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для всех значений $x \geq b_\varepsilon$. Предлагается также самостоятельно сформулировать свойства б.м. функций при $x \rightarrow +\infty$ и привести их доказательства.

Далее, предел функции при $x \rightarrow +\infty$ обладает свойством локальности и свойством линейности (произвольная линейная комбинация двух функций, имеющих пределы при $x \rightarrow +\infty$, также имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, равный аналогичной линейной комбинации пределов исходных функций). Предел произведения (частного) равен произведению (частному) пределов; предел б.м. функции при $x \rightarrow +\infty$ равен нулю и т.д.; в частности (это особенно важно в практическом вычислении пределов), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+c)^p} = 0$ для всех $p > 0$ и $c > 0$.

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3})$.

$$\Delta \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x+3)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = (-2) \cdot 0 = 0. \quad \Delta$$

§2. Непрерывные функции.

2.1. Окрестности. С помощью практического введения понятия окрестности лежащее в основе понятия числовой прямой. Окрестностью действительного числа назовем любой интервал в $\mathbb{R}$, содержащий это число. Таким образом, окрестностью числа $x_0 \in \mathbb{R}$ будет всякий конечный интервал (a, b) , $a < x_0 < b$, всякий бесконечный интервал $(-\infty, b)$, $x_0 < b$, и каждый бесконечный интервал $(a, +\infty)$, $a < x_0$, и всё $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Присваивая окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ напомним символом $U(x_0)$. Из определения следует, что: 1) точка (число) принадлежит каждой своей окрестности; 2) всякий интервал, содержащий окрестности точки, ~~есть~~ есть окрестность этой точки; и 3) окрестность точки x_0 есть окрестность каждой своей точки. Кроме того, 4) пересечение любых двух окрестностей точки образует окрестность этой точки. Проверим справедливость последнего свойства в случае, когда окрестности $U_1(x_0)$ и $U_2(x_0)$ числа x_0 являются конечными интервалами $U_1(x_0) = (a_1, b_1)$, $U_2(x_0) = (a_2, b_2)$. Пересечение $U_1(x_0) \cap U_2(x_0)$ не пусто, так как, по свойству 1), оно содержит точку x_0 . Положим $a = \max(a_1, a_2)$, $b = \min(b_1, b_2)$ и знаем, что $a_1 < x_0 < b_1$ и $a_2 < x_0 < b_2$, следовательно для любого $x \in (a, b)$, $a < x < b$, справедливо $a_1 < x < b_1$ и $a_2 < x < b_2$; т.е., $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ и обратно, для любого $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ справедливо $a_1 < x < b_1$ и $a_2 < x < b_2$, т.е., $a < x < b$ или $x \in (a, b)$ (см. рис. 1). Проверка справедливости свойств 4) в остальных случаях упрощается и представляется читателем.



Среди всех окрестностей числа $x_0 \in \mathbb{R}$ выделяются окрестности особого вида. Пусть δ — произвольное положительное число; δ -окрестность числа x_0 назовем интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; т.е., множество всех чисел удовлетворяющих двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Оно равносильно неравенству $|x - x_0| < \delta$, так что δ -окрестность числа x_0 есть купность всех точек числовой прямой, отстоящих от x_0 на расстоянии меньше δ (см. рис. 13); δ -окрестность числа x_0 обозначим $U(x_0, \delta)$, где δ называем радиусом этой окрестности. Итак, $U(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \delta\}$.

Нетрудно проверить, что любая окрестность числа содержит некоторую δ -окрестность. Опять продемонстрируем это свойство для конечного интервала. Пусть $U(x_0) = (a, b)$, $a < x_0 < b$. Положим $\delta = \min(x_0 - a, b - x_0)$, тогда $a \leq x_0 - \delta < x_0 + \delta \leq b$, и поскольку концевые точки интервала ему принадлежат, то заключаем, что интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = U(x_0, \delta)$ содержится в интервале $(a, b) = U(x_0)$.

Понятие в $\mathbb{R}$ обладает важным свойством отделимости: любые два разные действительные числа имеют непересекающиеся δ -окрестности. Действительно, пусть числа x и y различные и, для определенности $x < y$. Тогда $\delta = \frac{y-x}{2} > 0$ и $x - \delta < x < x + \delta = \frac{x+y}{2} = y - \delta < y < y + \delta$, и δ -окрестности $(x - \delta, x + \delta)$ и $(y - \delta, y + \delta)$ чисел x и y не пересекаются, так как концевые точки интервала ему не принадлежат.

2.2. Непрерывность функции в точке.

Пусть f — числовая функция (т.е., функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$). Зафиксируем какую-либо точку $x_0 \in D_f$. Разность между произвольным значением $x \in D_f$ и x_0 называется приращением аргумента x в точке x_0 и обычно обозначается Δx . Таким образом, $\Delta x = x - x_0$, $x = x_0 + \Delta x$.

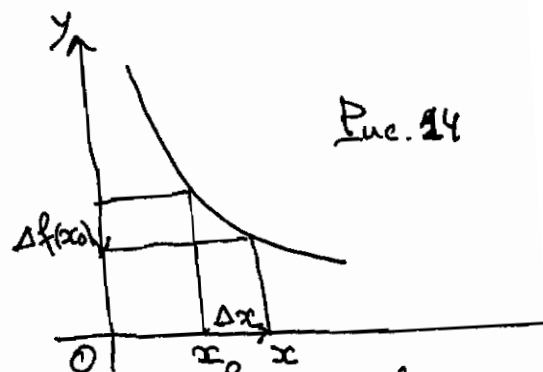


Рис. 24

Разность между значениями функции f в точках x и x_0 называют приращением функции f в точке x_0 и обычно обозначают $\Delta f(x_0)$. Таким образом, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (рис. 24).

Величина $\Delta f(x_0)$ при фиксированном x_0 есть функция аргумента x и аргумента Δx . При этом Δx подчинено единственному условию, что вместе с x_0 также $x_0 + \Delta x$ принадлежит D_f (в частности, Δx может быть нулем).

Чтобы можно было говорить о непрерывности функции f в точке, прежде всего нужно, чтобы f была в этой точке определена; т.е., $x_0 \in D_f$. f определено и приращение функции f в x_0 и естественно определить непрерывность f в x_0 как свойство, состоящее в том, что малые приращения аргумента x в x_0 вызывают малые приращения функции f в x_0 , при этом $\Delta f(x_0)$ можно сделать сколь угодно малым, если взять достаточно малым Δx (ср. рис. 24).

Определение 1 (О. Коши). Функция f называется непрерывной в точке x_0 , $x_0 \in D_f$ и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, (выбор δ зависит от ε), что в каждой точке $x \in D_f$ и $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Переформулируем это определение в терминах окрестностей.

Определение 1. Функция f называется непрерывной в точке x_0 , $x_0 \in D_f$ и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую δ -окрестность $U(x_0; \delta)$, $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, точки x_0 , что в каждой точке $x \in D_f \cap U(x_0; \delta)$ справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пример 1. Постоянные функции непрерывны в каждой точке области определения. Действительно, из условия $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, в любой точке $x \in D_f$ следует, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = 0$ для любой точки $x_0 \in D_f$ и всех $x \in D_f$. Поэтому, $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех $x \in D_f$; в частности, если $|x - x_0| < \delta$ при любом $\delta > 0$ (для постоянных функций число $\delta > 0$ в определении можно выбрать одним и тем же для всех $\varepsilon > 0$).

Пример 2. Линейная функция $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, непрерывна всюду $\mathbb{R} = D_f$. Действительно, $|f(x) - f(x_0)| = |ax - ax_0| = |a||x - x_0|$ для любых x . Так как $|a| > 0$, то выбирая для любого $\varepsilon > 0$ число $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$, заключаем, что для всех $x, x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ и $|x - x_0| < \delta$ справедливо $|f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0| < |a|\delta = \varepsilon$.

Пример 3. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна всюду на $\mathbb{R} = D_f$. Действительно, согласно свойству абсолютной величины действительного числа $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$ для всех $x, x_0 \in \mathbb{R} = D_f$. Поэтому

полагая $\delta = \varepsilon > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ и любых $x, x_0 \in \mathbb{R}$ с $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Прежде, чем рассмотреть следующий пример, введем такое Определение 2. Точку x_0 называют целимой точкой всего множества E , если $x_0 \in E$ и существует такая ее окрестность $U(x_0)$, которая не содержит других точек множества E , т.е., $E \cap U = \{x_0\}$.

Лемма 1. Всякая функция непрерывна в любой целимой точке своей области определения.

Пусть x_0 - целимая точка области определения f . Тогда, согласно определению 2, $D_f \cap U(x_0) = \{x_0\}$ для некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 . Но $U(x_0)$ содержит некоторую δ -окрестность $U(x_0; \delta) \subset U(x_0)$, $\delta > 0$, для которой также $D_f \cap U(x_0; \delta) = \{x_0\}$ другими словами, для любого $x \in D_f$ и $x \in U(x_0; \delta)$ или $|x - x_0| < \delta$ но быть $x = x_0$. Поэтому, $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ для всех $x, x_0 \in D_f$ с $|x - x_0| < \delta$ и любого $\varepsilon > 0$. $\square$

В заключение этого пункта укажем другую эквивалентную форму определения 1.

Определение 3. Функция f называется непрерывной в точке x_0 если $x_0 \in D_f$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D_f$ с $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2.3. Критерии непрерывности функции в точке.

Теорема. Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $x_0 \in D_f$ и для произвольной последовательности (x_n) так $x_n \in D_f$, $n \in \mathbb{N}$, имеющей $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, числовая последовательность $(f(x_n))$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$; т.е., $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

Необходимость. Пусть функция f непрерывна в x_0 . Согласно определению 1, $x_0 \in D_f$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, так что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in D_f$, $|x - x_0| < \delta$. Рассмотрим произвольную последовательность (x_n) точек $x_n \in D_f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, и последовательность $(f(x_n))$. ~~Так как~~ для числа $\delta > 0$ можно указать такой индекс N что $|x_n - x_0| < \delta$ для всех $n \geq N$ (Ометим, что выбор числа N зависит от δ , выбор которого, в свою очередь, зависит от ε , так что, конечно, выбор числа N зависит от $\varepsilon > 0$). Но из последнего вытекает, $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$, т.е., $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Достаточность. Пусть теперь выполнено свойство, указанное во второй части формулировки теоремы, но функция f не непрерывна в x_0 . Согласно обращению определения 1, существует $\varepsilon_0 > 0$ и для любого числа $\delta > 0$ найдется точка $x_\delta \in D_f$ и $|x_\delta - x_0| < \delta$ в которой $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Рассмотрим $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и видя, что для каждого $\delta_n > 0$ (т.е., каждого $n \in \mathbb{N}$) такую точку $x_n \in D_f$ $|x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Получим последовательность (x_n) точек $x_n \in D_f$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, ~~но~~ ^{всему} ~~но~~ ^{оценочного признака,}

существование предела последовательности и утверждение $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
 С другой стороны, неравенства $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0, n \in \mathbb{N}$, говорят о том, что $f(x_0)$ не является пределом последовательности $(f(x_n))$, что при условии (рассматриваемому свойству). Таким образом, сделан предположение неверно и функция f обязана быть непрерывной в точке x_0 .
 Этот критерий вытекает с определением 1 позволяет свести свойства в следующем пункте свойства непрерывных функций в точки к свойствам сходящихся последовательностей.

2.4. Локальные свойства непрерывных функций.

Лемма. Пусть функции f и g непрерывны в точке x_0 . Тогда:

- 1) (свойство линейности) для всех чисел λ_1, λ_2 функции $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ непрерывны в x_0 ;
- 2) (непрерывность произведения) функция $f \cdot g$ непрерывна в x_0 ;
- 3) (свойство сохранения неравенства (знака)) если $f(x_0) > c$, то существует δ_1 -окрестность $U(x_0; \delta_1), \delta_1 > 0$, точки x_0 , в которой $f(x) > c$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_1)$; если $f(x_0) < d$, то существует δ_2 -окрестность $U(x_0; \delta_2), \delta_2 > 0$, точки x_0 , в которой $f(x) < d$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_2)$; если $f(x_0) \neq 0$ то существует такая δ_3 -окрестность $U(x_0; \delta_3), \delta_3 > 0$, точки x_0 , в которой $f(x) \neq 0$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_3)$ и все значения $f(x)$ имеют тот же знак что и $f(x_0)$;
- 4) (свойство локальной ограниченности) функции f (g) ограничена в некоторой окрестности точки x_0 ;
- 5) (непрерывность частного) функции f/g непрерывна в x_0 , если:

1) Так как f и g непрерывны в x_0 , то $x_0 \in D_f$ и $x_0 \in D_g$, так что $x_0 \in D_f \cap D_g = D_{fg}$. Рассмотрим произвольную последовательность (x_n) что $x_n \in D_{fg}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Тогда $x_n \in D_f$ и $x_n \in D_g$ и по критерию непрерывности функции в точке, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Поэтому, утверждение о пределе произведения последовательностей, последовательности $(f \cdot g)(x_n), (f \cdot g)(x_n) = f(x_n)g(x_n), n \in \mathbb{N}$, имеет $\lim_{n \rightarrow \infty} (f \cdot g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(x_0)g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$. Опять применив критерий непрерывности функции в точке, заключаем, что функция $f \cdot g$ непрерывна в точке x_0 .

3) Согласно определению 1, для числа $\varepsilon_1 = f(x_0) - c > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1$ для всех $x \in D_f, |x - x_0| < \delta_1$. Поэтому, в частности $f(x) > f(x_0) - \varepsilon_1 = c$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_1)$. Аналогично, для числа $\varepsilon_2 = d - f(x_0) > 0$ существует число $\delta_2 > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_2$ для всех $x \in D_f$ и $|x - x_0| < \delta_2$ откуда $f(x) < f(x_0) + \varepsilon_2 = d$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_2)$.

Пусть теперь $f(x_0) \neq 0$. По вышеизложенному, если $f(x_0) > 0$, то $f(x) > 0$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_3)$, где число $\delta_3 > 0$ совпадает с $\delta_1 > 0$ для числа $c = 0$; если $f(x_0) < 0$, то $f(x) < 0$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_3)$, где число $\delta_3 > 0$ совпадает с $\delta_2 > 0$ для числа $d = 0$.

4) Так как в утверждении 3) числа $c = f(x_0) - 1$ и $d = f(x_0) + 1$, найдем на его основании такие окрестности $U(x_0; \delta_1)$ и $U(x_0; \delta_2)$, что $f(x) > f(x_0) - 1$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_1)$ и $f(x) < f(x_0) + 1$ для всех $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_2)$. Согласно свойству 4° окрестностей, пересечение $U(x_0; \delta_1) \cap U(x_0; \delta_2)$ есть некоторая окрестность $U(x_0; \delta_3)$ точки x_0 , а именно, $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2), \delta_3 > 0$. В каждой точке $x \in D_f \cap U(x_0; \delta_3)$ выполняется двойное неравенство $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$.

Показательство остальных утверждений теоремы совершается в обозначенной выше схеме для утверждения 2) и предоставляется читателем. Укажу только, что условие $g(x_0) \neq 0$ влечёт утверждение, что $g(x) \neq 0$ всех $x \in D_g \cap U(x_0; \delta)$ при некотором $\delta > 0$, и следовательно, в окрестности $U(x_0; \delta)$ определена функция $1/g$. Δ

2.5. Непрерывность композиции функций (сложной функции).

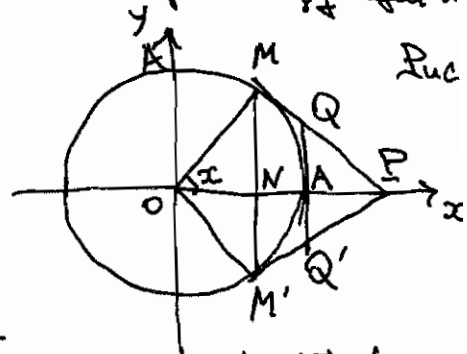
Теорема. Если функция g непрерывна в точке x_0 , а функция f непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то композиция $f \circ g$ этих функций непрерывна в точке x_0 . Согласно условию теоремы и определению 1, $x_0 \in D_g$ и $y_0 = g(x_0) \in D_f$, что и то $x_0 \in D_{f \circ g}$, поскольку $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$. Для произвольной последовательности (x_n) точек $x_n \in D_{f \circ g}$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $x_n \in D_g$ и $y_n = g(x_n) \in D_f$, и, если дополнительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, то, по критерию непрерывности функции в точке x_0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0) = y_0$. Применяя тот же критерий к функции f в точке y_0 , получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(y_0)$. Поскольку $f(y_n) = f(g(x_n)) = (f \circ g)(x_n)$ и $f(y_0) = f(g(x_0)) = (f \circ g)(x_0)$, то заключаем, что $(f \circ g)(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ g)(x_n)$ для любой последовательности (x_n) точек $x_n \in D_{f \circ g}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Это и означает, что по критерию непрерывности, функция $f \circ g$ непрерывна в x_0 . Δ

2.6. Примеры непрерывных функций.

Из теоремы пункта 2.4 следует, что всегда в своих областях определения непрерывны все степенные функции с целым показателем степени (теорема 2) и 5) теорема и примеры из пункта 2.1), все алгебраические многочлены $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, $a_0 \neq 0$, все рациональные функции $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (отношение алгебраических многочленов). Непрерывность тригонометрических функций устанавливается с помощью следующей

Лемма 1. $|\sin x| \leq |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и равенство справедливо только при $x = 0$.

Если $x = 0$, то $\sin 0 = 0$ и $|\sin 0| = |0|$. Если $|x| > \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$. Осталось рассмотреть случай, когда $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, а если учесть, что $|\sin x|$ — чётная функция, то следует рассмотреть только случай $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Построим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат O (см. рис. 15). То очевидно, $\sin x$ равен ординате точки M на окружности, для которой дуга AM равна x (радиан). Пусть M' — точка окружности, симметричная M относительно оси Ox . Длина отрезка MM' равна $2 \sin x$ и хорда MM' короче дуги $M'A$ (длина которой равна $2x$), т.е. $2 \sin x < 2x$ и $\sin x < x$. Δ



Пример 4. Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны на всем $\mathbb{R} = D_{\sin} = D_{\cos}$.

Для любых $x_0, x \in \mathbb{R}$ имеем $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}$ и $|\sin x - \sin x_0| = 2 |\sin \frac{x-x_0}{2}| \cdot |\cos \frac{x+x_0}{2}| \leq 2 |\sin \frac{x-x_0}{2}| \leq 2 |\frac{x-x_0}{2}| = |x-x_0|$. Поэтому, выбрав любого $\varepsilon > 0$ число $\delta = \varepsilon > 0$, заключаем, что $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ для всех x, x_0 , для которых $|x-x_0| < \delta$, т.е. $\sin x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Аналогично, $\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x-x_0}{2} \sin \frac{x+x_0}{2}$ и $|\cos x - \cos x_0| = 2 |\sin \frac{x-x_0}{2}| \cdot |\sin \frac{x+x_0}{2}| \leq 2 |\sin \frac{x-x_0}{2}| \leq 2 |\frac{x-x_0}{2}| = |x-x_0|$, откуда, как и выше, следует, что $\cos x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Δ

На основании примера 4 и теоремы пункта 2.4, заключаем, что функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывны всюду в своих областях определения. Вопрос о непрерывности показательной, логарифмической функции и степенной функции с произвольным показателем системы рассмотрим отдельно поз.

2.7. В дополнении к лемме 1 докажем полезное неравенство.

Лемма 2. Неравенство $x < \operatorname{tg} x$ справедливо для всех $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим снова окружность, изображенную на рис. 15. Касательные проведенные к ней в точках M и M' , пересекут ось Ox в одной ~~точке~~ и в точке F . Точки Q и Q' суть точки пересечения перпендикуляра, восставленного к оси Ox в точке A , соответственно с прямыми MF и $M'F$. Ломаная $M'Q'QM$ обхватывает все ломаные, вписанные в дугу $M'AM$, и поэтому дуга ломаной $M'Q'QM$ является одной из верхних граней для множества дуг вписанных ломаных (она длиннее каждой из них; геометрический факт с другой стороны, длина дуги $M'AM$, по определению, — наименьшая из таких верхних граней). Следовательно, $2x \leq M'Q' + Q'Q + MQ$. В свою очередь $M'Q' + Q'Q + QM < MF + M'F$. Но $M'F + MF = 2 \operatorname{tg} x$. Поэтому, $2x < 2 \operatorname{tg} x$ и $x < \operatorname{tg} x$.

3. Прерывность функции в точке.

2.8. Непрерывность функции во внутренней точке области определения.

В большинстве практических задач типовой представляется случай, когда область определения функции состоит из конечного промежутка (или объединения промежутков), а свойства непрерывности функции исследуются во внутренних точках промежутка (или промежутков). Пусть у функции f ее $D_f \supset \langle \alpha, \beta \rangle$ и $x_0, \alpha < x_0 < \beta$ — внутренняя точка промежутка $\langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда, как мы знаем, найдется некоторая окрестность $U(x_0; \delta_0)$, $\delta_0 > 0$, такая, что $U(x_0; \delta_0) \subset \langle \alpha, \beta \rangle \subset D_f$ и следовательно, $D_f \cap U(x_0; \delta_0) = U(x_0; \delta_0)$. В этом случае, в делении δ на свойства непрерывности функции в точке x_0 можно дополнительно считать меньшим, чем δ_0 , 0, поскольку утверждение $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ сохранится при уменьшении размеров множества $D_f \cap U(x_0; \delta)$.

Итак, когда $D_f \supset \langle \alpha, \beta \rangle$ и $\alpha < x_0 < \beta$, то функцию f назовем непрерывной в точке x_0 , если для произвольного числа ε можно указать такое число $\delta > 0$, $\delta = \delta_\varepsilon$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (или, что то же, неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ верно для всех $x \in U(x_0; \delta)$).

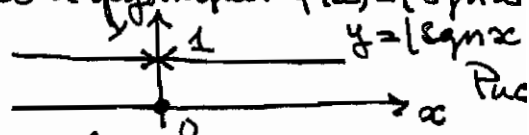
§3. Предел функции в точке.

3.1. Элементарные рассуждения, приводящие к понятию предела функции в точке.

Рассмотрим функцию $\operatorname{sgn} x$, график которой изображён на рис. 3. Она является непрерывной в точке $x_0 = 0$, поскольку в этой точке не выполняется критерий непрерывности (§2, п. 2.3). Действительно, последовательности (x_n) , $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет $\lim x_n = 0 (= x_0)$ и последовательность $(\operatorname{sgn} x_n)$, $= \operatorname{sgn} \frac{1}{n} = 1$ имеет $\lim \operatorname{sgn} x_n = 1$; с другой стороны последовательности (x'_n) , $x'_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, также имеет $\lim x'_n = 0 (= x_0)$ и последовательность $(\operatorname{sgn} x'_n)$, $\operatorname{sgn} x'_n = -1$, имеет $\lim \operatorname{sgn} x'_n = -1$, но $-1 \neq 1$.

То есть же функция не непрерывна в $x_0 = 0$ и функции $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$

$$|\operatorname{sgn} x| = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$



поскольку $|\operatorname{sgn} x_n| = |\operatorname{sgn} x'_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim |\operatorname{sgn} x_n| = \lim |\operatorname{sgn} x'_n| = 1$, но $1 \neq 0$.

Однако характер поведения функции $\operatorname{sgn} x$ и $|\operatorname{sgn} x|$ в окрестности точки $x_0 = 0$ качественно различны (ср. также Рис. 3 и 16). Для функции $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ можно указать такое число l (а именно, $l = 1$), что $l = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ для любой последовательности (x_n) , $x_n \neq 0 = x_0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim x_n = x_0$, поскольку, по определению, $|\operatorname{sgn} x_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся приращение $\Delta x = x - x_0 = x \neq 0$ аргумента x в точке x_0 такое, что $f(x) - l = |\operatorname{sgn} x| - 1 = 0$, и следовательно, $|f(x) - l| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех $x \neq x_0 = 0$; в частности, $|f(x) - l| < \varepsilon$ для всех $x \neq x_0$ и $|x - x_0| = |x| < \delta$, где $\delta = \varepsilon > 0$. Число $l = 1$ называется пределом функции $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ в точке $x_0 = 0$.

Число $l = 1$ будет пределом в точке $x_0 = 0$ также и для функции относительно определения D_f которой служит множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (т.е., D_f — все $x \neq 0$), а значение $g(x) = |\operatorname{sgn} x| = 1$, $x \in D_f$ (функция g не определена в самой точке $x_0 = 0$). Действительно, неравенство $|g(x) - l| = |1 - 1| = 0$ справедливо для любого числа $\varepsilon > 0$ и всех $x \in D_f$; в частности, оно справедливо для всех $x \in D_f$ и $0 < |x - x_0| = |x| < \delta$, где $\delta = \varepsilon > 0$. Множество $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ называют проколотой δ -окрестностью точки $x_0 (= 0)$ и обозначают $\dot{U}(x_0; \delta)$.

Аналогичного числа l для функции $\operatorname{sgn} x$ в точке $x_0 = 0$ указать нельзя, что будет объяснено ниже в пункте 3.10.

Отметим также, что для каждой из рассмотренных выше функций f и g можно указать функцию h (а именно, $h(x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{R} = D_f$), которая совпадает с f для всех $x \in D_f$ и $x \neq x_0 = 0$ и совпадает с g для всех $x \in D_g$ ($x \neq x_0 = 0$), непрерывна в точке $x_0 (= 0)$ и значение h которой в точке $x_0 (= 0)$ равно значению предела l в этой точке функции f и функции g .

Подводя итог приведённым выше рассуждениям, повторим следующие важные observations. Во-первых, значение приращения аргумента функции f и g в точке $x_0 (= 0)$ выбираются всевозможным образом так, что точки $x = x_0 + \Delta x \neq x_0$. Во-вторых, поскольку всегда можно указать сколь угодно малую проколотую δ -окрестность точки x_0 , которая содержит точки $x \in D_f$ (и D_g), отличные от x_0 . В частности,

перестаёт быть важным условие принадлежности самой точки: области определения D_f функции $f(x) = |\sin x|$, ибо вклад в число ε дают лишь те значения функции f , которые приближаются к ε достаточно близко от $x_0 (=0)$. Последнее обстоятельство явно проявилось при рассмотрении функции $g(x)$ с областью определения $D_g = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ и значениями $g(x) = |\sin x|, x \in D_g$. И наконец, теорема об этом свойстве (используемая в практических вычислениях пределов), что непрерывная в точке x_0 функция h , совпадающая с f и во всех $x \in D_f, x \neq x_0$, и во всех $x \in D_g (x \neq x_0)$, соответственно, и значение которой в точке x_0 совпадает с пределом функций f и g в точке x_0 .

Итак, прежде, чем приступить к изучению предела функции f не необходимо установить свойства проколотых окрестностей точки a в $\mathbb{R}$.

3.2. Свойства проколотых окрестностей.

Определение 1. Проколотой окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ назовём любую (её) окрестность без самой точки (самой точки) a . Обозначим $\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

Итак, если $U(a) = (\alpha, \beta), \alpha < a < \beta$, — произвольная окрестность точки a то $\dot{U}(a) = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$.

Проколотой δ -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ назовём множество $\dot{U}(a; \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta), \delta > 0$; т.е., $\dot{U}(a; \delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

Из этих определений и свойств окрестностей точки в $\mathbb{R}$ следуют свойства проколотых окрестностей.

Свойство 1. Всякая $U(a) \neq \emptyset$.

Свойство 2. Пересечение $\dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a)$ проколотых окрестностей $\dot{U}_1(a)$ и $\dot{U}_2(a)$ точки a образует некоторую проколотую окрестность точки a , так что $\dot{U}_3(a) = \dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a)$.

Действительно, так как $\dot{U}_i(a) = U_i(a) \setminus \{a\}, i = 1, 2$, и $U_1(a) \cap U_2(a) = U_3(a)$ — некоторая окрестность точки a то $\dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a) = [U_1(a) \setminus \{a\}] \cap [U_2(a) \setminus \{a\}] = [U_1(a) \cap U_2(a)] \setminus \{a\} = U_3(a) \setminus \{a\} = \dot{U}_3(a)$.

В частности, $\dot{U}(a; \delta_1) \cap \dot{U}(a; \delta_2) = \dot{U}(a; \delta_3)$, где $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2), \delta_3 > 0$.

Свойство 3. Любая проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a содержит некоторую проколотую δ -окрестность $\dot{U}(a; \delta), \delta > 0$, точки a .

Действительно, согласно свойствам окрестностей, существует $\delta > 0$, что $U(a; \delta) \subset U(a)$. Тогда $\dot{U}(a; \delta) = U(a; \delta) \setminus \{a\} \subset U(a) \setminus \{a\} = \dot{U}(a)$.

Свойство 4. Если a — внутренняя точка промежутка $\langle \alpha, \beta \rangle$; т.е. $\alpha < a < \beta$, то существует $\delta_0 > 0$, что $\dot{U}(a; \delta_0) \subset \langle \alpha, \beta \rangle$ и $\dot{U}(a; \delta_0) \cap \langle \alpha, \beta \rangle = \dot{U}(a; \delta_0)$.

Согласно предыдущему свойству 3, проколотая окрестность $\dot{U}(a) = (\alpha, \beta) \setminus \{a\}$ точки a содержит некоторую проколотую δ_0 -окрестность точки a ; т.е., $\dot{U}(a; \delta_0) \subset \dot{U}(a) \subset (\alpha, \beta) \subset \langle \alpha, \beta \rangle, \delta_0 > 0$. Тогда $\dot{U}(a; \delta_0) \cap \langle \alpha, \beta \rangle = \dot{U}(a; \delta_0)$. $\triangleright$

3.3. Предел функции в точке.

Пусть a — внутренняя точка невырожденного промежутка Δ $\alpha < a < \beta$, и область определения D_f функции f содержит проколотую окрестность $\dot{U}(a) = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$ точки a ; так что $D_f \supset \dot{U}(a)$ и $D_f \cap \{a\} = \emptyset$. Согласно свойству 1 проколотых окрестностей, найдётся $\delta_0 > 0$, что $\dot{U}(a, \delta_0) \subset \dot{U}(a)$.

Определение 2 (О. Коши). Число $l \in \mathbb{R}$ называют пределом функции f в точке a , если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, $\delta = \delta_\varepsilon$, и $0 < |x - a| < \delta$, что неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ справедливо для всех x , $0 < |x - a| < \delta$, т.е., оно справедливо для всех $x \in \dot{U}(a; \delta)$. Обозначение: $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (читается: l есть предел (лимит) f при x от x к a при x стремящемся к a).

Теорема 1 (единственность предела). Функция не может иметь в данной точке два различных предела.

Из этой теоремы следует, что для заданной функции в данной точке или не существует предела, или имеется единственный предел, являющийся пределом этой функции в данной точке.

Доказательство теоремы проведём методом от противного. Предположим, что функция f имеет в точке a два различных предела l_1 и l_2 , $l_1 \neq l_2$. Для ненулевого числа $\varepsilon = \frac{1}{4} |l_1 - l_2| > 0$ найдём (по определению 2) такие числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_1)$, и $|f(x) - l_2| < \varepsilon$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_2)$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\delta > 0$. Согласно свойству 2 проколотых окрестностей $\dot{U}(a; \delta) = \dot{U}(a; \delta_1) \cap \dot{U}(a; \delta_2)$, и следовательно, для всех $x \in \dot{U}(a; \delta)$ справедливы одновременно неравенства $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ и $|f(x) - l_2| < \varepsilon$. Возьмём точку $x_0 \in \dot{U}(a; \delta)$, получим

$|l_1 - l_2| = |l_1 - l_2 + f(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x_0) - l_1| + |f(x_0) - l_2| < 2\varepsilon = \frac{1}{2} |l_1 - l_2|$, так что $|l_1 - l_2| < \frac{1}{2} |l_1 - l_2|$ и $1 < \frac{1}{2}$ ($|l_1 - l_2| > 0$). Получили неравенство, что невозможно, что доказывает, что сделанное предположение неверно и теорема доказана. $\triangleright$

3.4. Предел и сохранение неравенств.

Теорема. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > p$ [$\lim_{x \rightarrow a} f(x) < q$], то существует такая колющая окрестность $\dot{U}_1(a)$ [$\dot{U}_2(a)$] точки a , что $f(x) > p$ [$f(x) < q$] для любого $x \in \dot{U}_1(a)$ [любого $x \in \dot{U}_2(a)$].

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Тогда число $\varepsilon_1 = l - p > 0$ и для него, согласно определению 2, найдётся такое число $\delta_1 > 0$, что $|f(x) - l| < \varepsilon_1$ для всех x , $0 < |x - a| < \delta_1$; т.е., для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_1)$. Поэтому, $f(x) - l > -\varepsilon_1 = p - l$ и $f(x) > p$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_1)$.

Аналогично, число $\varepsilon_2 = q - l > 0$ и для него, согласно определению 2, найдётся такое число $\delta_2 > 0$, что $|f(x) - l| < \varepsilon_2$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_2)$. Поэтому, $f(x) - l < \varepsilon_2 = q - l$ и $f(x) < q$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_2)$. $\triangleright$

Следствие 1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$, то существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a , в которой $f(x) \neq 0$ для всех $x \in \dot{U}(a)$.

Из условия, или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0 = p$, или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0 = q$, и применив утверждение теоремы. $\triangleright$

Дополнение к пункту 3.3.

Из определения 2 непосредственно следует, что если $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$ (поскольку $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$).

3.3'. Предел и непрерывность.

Пусть область определения D_f функции f содержит некую промежутость $\langle \alpha, \beta \rangle$ и x_0 — внутренняя точка промежутка, $\alpha < x_0$.

Теорема. Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Необходимость. Дано, что f непрерывна в x_0 . В силу произвольного числа $\varepsilon > 0$. Согласно определению (см. пункт 2.8, § 2), существует число $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех x , $|x - x_0| < \delta$. И $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ и для всех x , $0 < |x - x_0| < \delta$, так что $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Достаточность. Дано, что $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Тогда, по определению 2, рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$, напомним такое число $\delta > 0$, чтобы $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех x , $0 < |x - x_0| < \delta$. Но $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ справедливо и в точке $x = x_0$ ($|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$), и следовательно, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех x , $|x - x_0| < \delta$, так что по определению из пункта 2.8, § 2, функция f непрерывна в точке x_0 . $\triangleright$

Следствие 2. Если существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, то f ограничена в проколотой окрестности точки a (или f ограничена при $x \rightarrow a$).
 1. Выберем числа $p, q \in \mathbb{R}$, такие что $p < l < q$, и по теореме Нейфа соответствующие проколотые окрестности $\dot{U}_1(a)$ и $\dot{U}_2(a)$. В их пересечении $\dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a) = \dot{U}_3(a)$ — проколотой окрестности точки a , в которой утверждения теоремы, выполнены неравенства $p < f(x) < q$. $\triangleright$

3.5. Бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$.

Определение 3. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой (б.м.) при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, т.е., если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, $\delta = \delta_\varepsilon$, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для всех x , $0 < |x - a| < \delta$ или, что то же самое, $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta)$.

Сравнивая это определение с определением 2 и учитывая тем единственность предела функции, заключаем, что справедливы

Теорема (о представлении функции, имеющей предел при $x \rightarrow a$)
 Число $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = l + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.

Бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$ обладают свойствами, аналогичными свойствами бесконечно малых последовательностей.

Теорема 1. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м. функции при $x \rightarrow a$, то $\alpha(x) \pm \beta(x)$ — б.м. функции при $x \rightarrow a$.

Нужно проверить, что функции $\alpha(x) \pm \beta(x)$ удовлетворяют определению 3. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. По условию теоремы и определению 3, существуют такие числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_1)$ и $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_2)$. В пересечении $\dot{U}(a; \delta_1) \cap \dot{U}(a; \delta_2) = \dot{U}(a; \delta)$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\delta > 0$, являющейся проколотой δ -окрестностью точки a справедливы оба неравенства для $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, и поэтому, $|\alpha(x) \pm \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta)$; так что, по определению 3, $\alpha(x) \pm \beta(x)$ суть б.м. функции при $x \rightarrow a$. $\triangleright$

Теорема 2. Произведение $\alpha(x)q(x)$ бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$ и ограниченной функции $q(x)$ при $x \rightarrow a$ образует б.м. функцию при $x \rightarrow a$.
 1. По условию, существует число $M \geq 0$ и проколотая окрестность $\dot{U}$ точки a , в которой $|q(x)| \leq M$ для всех $x \in \dot{U}(a)$. Рассмотрим проколотую δ_1 -окрестность $\dot{U}(a; \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, содержащуюся в $\dot{U}(a)$ и в которой $|q(x)| \leq M$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_1)$. Пусть число $\varepsilon > 0$ произвольное. Согласно определению 3, существует число $\delta_2 > 0$, что $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_2)$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и рассмотрим пересечение $\dot{U}(a; \delta_1) \cap \dot{U}(a; \delta_2) = \dot{U}(a; \delta)$. В этой окрестности $x \in \dot{U}(a; \delta)$ справедливы $|q(x)| \leq M$ и $|\alpha(x)| < \varepsilon/M$, так что $|\alpha(x)q(x)| = |\alpha(x)| \cdot |q(x)| \leq M|\alpha(x)| < M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta)$, и по определению 3, $\alpha(x)q(x)$ — б.м. функция при $x \rightarrow a$. $\triangleright$

Следствие 1. Всякая линейная комбинация двух (и любого числа) б.м. функций при $x \rightarrow a$ образует б.м. функцию при $x \rightarrow a$.

Следствие 1. Произведение $\alpha(x)\beta(x)$ бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ образует б.м. функцию при $x \rightarrow a$ (так как каждая из этих функций ограничена при $x \rightarrow a$, как имеющая предел нуль).

Следствие 2. Всякая линейная комбинация двух (и любого числа) б.м. функций при $x \rightarrow a$ образует б.м. функцию при $x \rightarrow a$.

Δ Рассмотрим произвольные δ -м. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$ и произвольные числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 2, функции $\lambda_1 \alpha(x)$, $\lambda_2 \beta(x)$ — δ -м. при $x \rightarrow a$. Поэтому, согласно теореме 1, функции $\lambda_1 \alpha(x) + \lambda_2 \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$. ▽

Непосредственно из определения 3 и свойств прекалотовых окрестностей следует, что: 1) функция $\alpha(x)$ будет δ -м. при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда функция $|\alpha(x)|$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$. 2) если функция $\beta(x)$ бесконечно малая при $x \rightarrow a$ и $|\beta(x)| \geq |\alpha(x)|$ некоторой прекалотовой окрестности точки a , то $\alpha(x)$ — также δ -м. функция при $x \rightarrow a$. Для проверки утверждения 1) нужно только заметить, что $|\lambda \alpha(x)| = |\lambda| |\alpha(x)|$ и воспользоваться определением 3. В проверке утверждения 2) помимо определения 3 используются свойства прекалотовых окрестностей (свойства 2 и 3).

3.6. Свойства функций, имеющих предел.

В основе доказательства большинства результатов из этой параграф лежат свойства δ -м. функций и теорема о представлении функций, имеющих предел, которую переформулируем в виде леммы:

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \begin{cases} f(x) - l = \alpha(x) \text{ есть } \delta\text{-м.} \\ \text{функция при } x \rightarrow a. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема. Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то существуют;

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, где λ — число (постоянная);
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

На практике обычно пользуются краткими формулировками:

- 1) предел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов;
- 2) постоянный множитель выносится за знак предела;
- 3) предел произведения равен произведению пределов;
- 4) предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

Δ Для доказательства теоремы положим $l_1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $l_2 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Тогда, согласно (1), $\alpha(x) = f(x) - l_1$ и $\beta(x) = g(x) - l_2$ есть δ -м. функции при $x \rightarrow a$ и $f(x) = l_1 + \alpha(x)$, $g(x) = l_2 + \beta(x)$. Далее воспользуемся уже доказанными свойствами бесконечно малых функций.

1) $(f(x) \pm g(x)) - (l_1 \pm l_2) = (f(x) - l_1) \pm (g(x) - l_2) = \alpha(x) \pm \beta(x)$ есть δ -м. функция при $x \rightarrow a$ и опираясь с учетом (1) утверждение 1) доказано;

2) $\lambda f(x) - \lambda l_1 = \lambda (f(x) - l_1) = \lambda \alpha(x)$ — δ -м. функция при $x \rightarrow a$ и с учетом (1) утверждение 2) доказано;

3) утверждение 3) доказано;

4) $f(x)g(x) - l_1 l_2 = (l_1 + \alpha(x))(l_2 + \beta(x)) - l_1 l_2 = l_2 \alpha(x) + l_1 \beta(x) + \alpha(x) \beta(x)$ — δ -м. функция при $x \rightarrow a$ и с учетом (1) утверждение 4) доказано;

4) Сначала докажем ограниченность $\frac{1}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$. Так как $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = |l_2| > \frac{|l_2|}{2}$ (напомним, что $l_2 \neq 0$), то по теореме нужно найти такую прекалотовую окрестность $U(a)$ точки a , что $|g(x)| > \frac{|l_2|}{2} > 0$ для всех $x \in U(a)$, и следовательно, $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|l_2|}$ для $x \in U(a)$. Далее

$$\frac{f(x) - l_2}{g(x) - l_2} = \frac{l_2 f(x) - l_1 g(x)}{l_2 g(x)} = \frac{l_2(l_1 + \alpha(x)) - l_1(l_2 + \beta(x))}{l_2 g(x)} =$$

$$= \frac{l_2 l_1 + l_2 \alpha(x) - l_1 l_2 - l_1 \beta(x)}{l_2 g(x)} = \frac{1}{g(x)} \left(\alpha(x) - \frac{l_1}{l_2} \beta(x) \right)$$

если бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$ и утверждение 4) доказано.

Теорема (переход к пределу в неравенствах, или свойства монотонности предела). Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ и в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_1$ точки a выполняются неравенства $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Доказательство сначала проведем для частного случая $g(x)$ положителен $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Предположим, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$. Тогда по утверждению 3.4 существует такая проколотая окрестность $\dot{U}_2$ точки a в которой $f(x) < 0$ для всех $x \in \dot{U}_2$. Возьмем число $x_0 \in \dot{U}_1 \cap \dot{U}_2$ и имеем $f(x_0) < 0$, так как $x_0 \in \dot{U}_2$, и $f(x_0) \geq 0$, так как $x_0 \in \dot{U}_1$; ит.е., имеем противоречие. Оно показывает, что сделанное предположение неверно, значит, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$.

Для доказательства общего случая заметим, что $f - g \geq 0$ на $\dot{U}_1$. Поэтому, в силу доказанного частного случая и утверждение 1) и функции теоремы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) \geq 0$, откуда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Δ

Теорема (оценочный признак существования предела). Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ и в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_1$ точки a выполняются неравенства $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ для $x \in \dot{U}_1$, то $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$.

Докажем всего лишь то, что $\dot{U}_1$ содержит некоторую проколотую δ_1 -окрестность $\dot{U}(a; \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, такую, что $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ для всех $x \in \dot{U}(a; \delta_1)$; ит.е., для всех x , $0 < |x - a| < \delta_1$. Берем любое число $\varepsilon > 0$. подбираем числа $\delta_2 > 0$ и $\delta_3 > 0$ такими, чтобы $|f(x) - l| < \varepsilon$ для всех x , $0 < |x - a| < \delta_2$, и $|g(x) - l| < \varepsilon$ для всех x , $0 < |x - a| < \delta_3$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $\delta > 0$. Тогда для всех x , $0 < |x - a| < \delta$, имеем $|f(x) - l| < \varepsilon$ и $|g(x) - l| < \varepsilon$ и $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Поэтому $-\varepsilon < f(x) - l \leq h(x) - l \leq g(x) - l < \varepsilon$ для всех x , $0 < |x - a| < \delta$, откуда $|h(x) - l| < \varepsilon$ для всех x , $0 < |x - a| < \delta$ и $l = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$. Δ

В качестве примера применения этой теоремы докажем,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2)$$

Эту формулу называют первым замечательным пределом.

4 Для $x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$, справедливы неравенства $\sin x < x < \tan x$ (с помощью 2.6 и 2.7, § 2). Поэтому $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Так как функции $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ и 1 — четные, то неравенства между ними выполняются не только для любого $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, но и для любого $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. То $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) = \dot{U}$ есть проколота $\frac{\pi}{2}$ -окрестность точки 0. А так как функции $\cos x$ и 1 непрерывны всюду на $\mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, то по предыдущей теореме (о точном признаке) формула (2) доказана. $\triangleright$

Теорема* (о замене переменной). Пусть выполнены три условия: 1) существует $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$; 2) существует $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = l$ и 3) существует проколота окрестность $\dot{U}_1(a)$ точки a , в которой $g(x)$ для всех $x \in \dot{U}_1(a)$. Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow b} f(t) = l.$$

При этом говорят, что в пределе слева сделана замена перемен по формуле $t = g(x)$, или (читая эту формулу справа налево) в пределе справа сделана подстановка по формуле $t = g(x)$.

4 Рассмотрим такое число $\delta_1 > 0$, чтобы $\dot{U}(a, \delta_1) \subset \dot{U}_1(a)$, и произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно условию 2) теоремы, для $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_2 > 0$, что

$$|f(t) - l| < \varepsilon \text{ для всех } t, 0 < |t - b| < \delta_2. \quad (3)$$

Из условия 1) теоремы следует, что для числа $\delta_2 > 0$ существует число $\delta_3 > 0$, что

$$|g(x) - b| < \delta_2 \text{ для всех } x, 0 < |x - a| < \delta_3. \quad (4)$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $\delta > 0$. Для любого $x, 0 < |x - a| < \delta$, справедливо условие 3) теоремы ($\delta \leq \delta_1$) и $g(x) \neq b$, а также справедливы утверждения (4) ($\delta \leq \delta_3$). Поэтому,

$$0 < |g(x) - b| < \delta_2 \text{ для всех } x, |x - a| < \delta. \quad (5)$$

Объединяя утверждения (3) и (5), заключаем, что $|f(g(x)) - l| < \varepsilon$ для всех $x, 0 < |x - a| < \delta$; и.е., $l = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$. $\triangleright$

Замечание. Заключение этой теоремы не может быть сделано если в ней отсутствует условие 3); на это указывает такой пример:

Пусть $g(x) = 1$ для всех x , так что $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$, а $f(1) = 3$. $f(t) = 0$ для всех $t \neq 1$, так что $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 0$. Сложив функции $f(g(x)) = 3$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и тогда $\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = 3 \neq 0 = \lim_{t \rightarrow 1} f(t)$.

Следствие. Если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ и $\alpha(x) \neq 0$ в проколота окрестности точки a , то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$.

4 Сделаем замену $t = \alpha(x)$ и применим формулу (2). $\triangleright$

3.7. Бесконечно большие функции; пределы при стремлении к бесконечности.

Определение 4. Функцию f называют бесконечно большой при x (или в точке a) и пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если функция $1/f$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Особо подчеркнём, что бесконечно большая функция предела (в смысле определения 2) не имеет; символ ∞ не есть число.

График бесконечно большой функции при $x \rightarrow a$ имеет при $x=a$ своей вертикальной касательной.

В конце §1 введено понятие предела функции при $x \rightarrow +\infty$, кве теперь понятие предела функции при x , стремящемся к бесконечности (при $x \rightarrow \infty$).

Определение 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(\frac{1}{t})$.

Пример. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(1/t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} = \infty$.

Поскольку для предела, стоящего в правой части определения: теоремы о пределе суммы, произведения и т.п. уже доказаны, то в эти теоремы сохраняются и для предела функции при $x \rightarrow \infty$.

3.8. Второй замечательный предел и его следствия.

В задачах естественных наук часто возникает значение функции $(1+x)^{1/x}$ при "очень малых" x ; т.е., ставится вопрос о значении этой функции при $x \rightarrow 0$. В последнем пункте §1 рассматривается $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, $2 < e < 3$, $e = 2,71828...$. Число e равно также $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ и поэтому, на основании определения 5, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{t})^t = e$.

Формулу

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \quad (6)$$

называют вторым замечательным пределом.

В практических расчётах наряду с десятичными логарифмами (а точнее, значительно чаще) используют значения логарифмических функций с основанием e ; они называются натуральными логарифмами и обозначаются $\ln$:

$$\ln x = \log_e x, x > 0.$$

Показательную функцию с основанием e называют экспонентной функцией (или, экспонентой) и основное логарифмическое тождество принимает вид

$$e^{\ln x} = x, x > 0, \text{ или } \ln e^x = x, x \in \mathbb{R}. (*)$$

На рис. 17 приведены графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$, непрерывных всюду в своих областях определения.

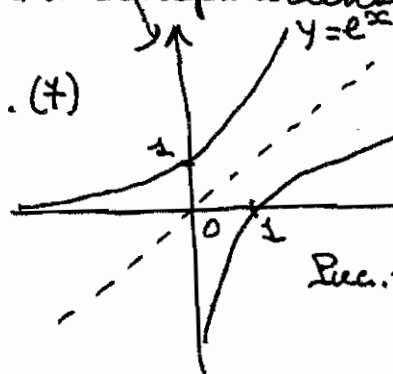


Рис. 17

Приведем важные следствия формулы (6).

Утверждение 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$$\Delta \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln[(1+x)^{1/x}] = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1,$$

где в первом равенстве мы воспользовались свойством логарифмической функции, во втором — свойством непрерывности логарифмической функции и теоремой пункта 3.3', в предпоследнем равенстве — формулой (6) и в последнем равенстве — формулой (7). $\triangleright$

Утверждение 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $0 < a \neq 1$, и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Δ Сделаем замену $t = a^x - 1$, $b = \lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1) = a^0 - 1 = 0$, $x \ln a = \ln(1+t)$ и $x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$, и на основании теоремы о замене переменной, запишем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln a}{\ln(1+t)} = \ln a,$$

где в последнем равенстве использовано утверждение 1, формула предела дроби и правило выноса постоянного множителя за знак предела. $\triangleright$

3.3. Эквивалентность функций.

Вычисление пределов облегчается, если ввести понятие эквивалентности при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$) функций.

Определение 6. Функции f и g называют эквивалентными при $(x \rightarrow \infty)$ и пишут $f \sim g$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$).

Примеры: а) $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ (см. формулу (2)); б) $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$ (утверждение 1); в) $a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \rightarrow 0$ (утверждение 2).

Лемма. Если $\alpha = \alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow d$ ($\alpha(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки d ($\alpha(x)$ вне некоторого отрезка)), то при $x \rightarrow d$ (соответственно, при $x \rightarrow \infty$): 1) $\sin \alpha \sim \alpha$; 2) $\tan \alpha \sim \alpha$; 3) $\arcsin \alpha \sim \alpha$; 4) $\arctan \alpha \sim \alpha$; 5) $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$; 6) $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$ ($0 < a \neq 1$); 7) $(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha$ ($p \neq 0$); 8) $1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2} \alpha^2$.

Δ Функции 1) доказан в следствии к теореме о замене переменной. Пользуясь им,

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{\tan \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow d} \left(\frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{1}{\cos \alpha(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow d} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} \lim_{x \rightarrow d} \frac{1}{\cos \alpha(x)} = 1,$$

где использовано также свойство непрерывности функции $\cos$ ($\lim_{x \rightarrow d} \cos \alpha(x) = \cos 0 = 1$) и формула предела частного.

Для доказательства пунктов 5) и 6) делаем замену $t = \alpha(x)$.

$$5) \lim_{x \rightarrow d} \frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \text{ (утверждение 1);}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow d} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a \text{ (утверждение 2).}$$

Доказательство пункта 8) опирается на пункт 1) и свойство непрерывности функции t^2 всюду на $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{1 - \cos \alpha(x)}{\frac{1}{2} \alpha^2(x)} = \lim_{x \rightarrow d} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha(x)}{2}}{\frac{1}{2} \alpha^2(x)} = \lim_{x \rightarrow d} \left(\frac{\sin \frac{\alpha(x)}{2}}{\alpha(x)/2} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow d} \frac{\sin \frac{\alpha(x)}{2}}{\alpha(x)/2} \right)^2 = 1^2 = 1.$$

В доказательстве пункта 7) опираемся на пункты 5) и 6):

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{(1 + \alpha(x))^p - 1}{p \alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow d} \frac{e^{p \ln(1 + \alpha(x))} - 1}{p \ln(1 + \alpha(x))} \cdot \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} = 1,$$

поскольку $p \ln(1 + \alpha(x))$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow d$ и $\ln e = 1$.

При доказательстве пункта 3) делаем замену $t = \arcsin \alpha(x)$; тогда $\alpha(x) = \sin t$, $b = \lim_{x \rightarrow d} \arcsin \alpha(x) = \arcsin 0 = 0$ и опираемся на пункт 1)

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

При доказательстве формулы 4) делаем замену $t = \arctg \alpha(x)$; тогда $\alpha(x) = \operatorname{tg} t$, $b = \lim_{x \rightarrow d} \arctg \alpha(x) = \arctg 0 = 0$ и используем пункт 2):

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{\arctg \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1. \quad \triangleright$$

Применение эквивалентности функций к вычислению пределов основано на следующей теореме.

Теорема (замена на эквивалентную в пределе). Если $f \sim g$ при $(x \rightarrow d)$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow d \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) p(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow d \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) p(x) \text{ и } \lim_{\substack{x \rightarrow d \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{p(x)}{f(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow d \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{p(x)}{g(x)}, \quad (8)$$

если существует предел в одной из частей равенств.

Рассмотрим случай $x \rightarrow d$. Из определения 6 эквивалентных функций следует, что в некоторой проколотой окрестности точки a (ведь $g(x) \neq 0$ (так как g должна быть определенной)) и $f(x)$ (по следствию 2 из пункта 3.4 для функции $\frac{f(x)}{g(x)}$). Пусть существует предел, стоящий в формулах (8) справа. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) p(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} g(x) p(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow a} g(x) p(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) p(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{p(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{g(x)}.$$

Доказательство для случая $x \rightarrow \infty$ повторяется дословно. $\triangleright$

Пример: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \sin 2x} - 1}{3 \sin x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{7} (-\sin 2x)}{\ln 3 \cdot \sin x} = -\frac{1}{7 \ln 3} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x}$
 $= -\frac{2}{7 \ln 3} \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -\frac{2}{7 \ln 3} \cos \pi = \frac{2}{7 \ln 3}.$

3.10. Односторонние пределы; односторонняя непрерывность.

Произвольная проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a есть объединение двух непустых интервалов $(\alpha, a) \cup (a, \beta) = \mathring{U}(a)$; интервал (α, a) называется левой проколотой окрестностью точки a , интервал (a, β) — правой проколотой окрестностью точки a . Правой проколотой окрестностью точки a называется $\mathring{U}(a) \cap (a, \infty)$, $\delta > 0$, точки a принадлежат левой и правой

Для любого числа $\delta > 0$ интервал $(a-\delta, a)$ называют левой δ -окрестностью точки a , а интервал $(a, a+\delta)$ — правой δ -окрестностью точки a . Их объединение $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ образует при этом δ -окрестность точки a ; $V(a; \delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$. При этом $(a-\delta, a) = (a, \alpha) \cap V(a; \delta)$ и $(a, a+\delta) = (a, \beta) \cap V(a; \delta)$ для всякого $\delta > 0$, если $\delta \leq \min(\alpha - a, \beta - a)$.

Определение 7. Число $l_1 \in \mathbb{R}$ называют левым пределом функции f в точке a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, $\delta = \delta_\varepsilon$, что неравенство $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ становится справедливым для всех x , $a - \delta < x < a$; т.е., оно справедливо для всех значений x из δ -окрестности точки a .

Для левого предела l_1 функции f в точке a принято специальное обозначение $l_1 = f(a-0)$ и $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.

Определение 8. Число $l_2 \in \mathbb{R}$ называют правым пределом функции f в точке a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, $\delta = \delta_\varepsilon$, что неравенство $|f(x) - l_2| < \varepsilon$ становится справедливым для всех x , $a < x < a + \delta$; т.е., оно справедливо для всех значений x из δ -окрестности точки a .

Для правого предела l_2 функции f в точке a закреплено специальное обозначение $l_2 = f(a+0)$ и $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Таким образом, чтобы иметь возможность рассуждать о левых и правых пределах функции f в точке a , необходимо выполнение условия, что область определения D_f функции f содержит некоторую проколотую окрестность $V(a) = (a, \alpha) \cup (a, \beta)$ точки a ; $D_f \supset V(a)$.

Теорема (о связи односторонних пределов с пределом). Для того чтобы выполнялось равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, необходимо и достаточно выполнение одновременно двух равенств:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = l \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l.$$

Необходимость. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое число $\delta > 0$, чтобы $|f(x) - l| < \varepsilon$ было справедливым для всех x , $0 < |x - a| < \delta$. Тогда $|f(x) - l| < \varepsilon$ справедливо как для x , $-\delta < x - a < 0$ (т.е., для всех x , $a - \delta < x < a$), так и для всех x , $0 < x - a < \delta$ (т.е., для всех x , $a < x < a + \delta$), и следовательно, на основании определения f , $l = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Достаточность. Пусть $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = l$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдем числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, чтобы $|f(x) - l| < \varepsilon$ было справедливым для всех x , $a - \delta_1 < x < a$; т.е. для всех x , $-\delta_1 < x - a < 0$ (l — левый предел функции f в точке a) и $|f(x) - l| < \varepsilon$ для всех x , $a < x < a + \delta_2$ (т.е. для всех x , $0 < x - a < \delta_2$ (l — правый предел функции f в точке a)). Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\delta > 0$. Тогда $|f(x) - l| < \varepsilon$ выводится как для всех x , $-\delta < x - a < 0$ ($\delta \leq \delta_1$), так и для всех x , $0 < x - a < \delta$ ($\delta \leq \delta_2$); т.е., $|f(x) - l| < \varepsilon$ для всех x , $0 < |x - a| < \delta$, и $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. $\square$

Пример: Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$, поскольку её левый предел в x_0 , $\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \rightarrow 0-0} (-1) = -1$, не совпадает с её правым пределом в x_0 , $\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1$.

Отметим, что односторонние пределы обладают всеми свойствами обычных пределов функций в точке.

Определение 8. Функция f называется непрерывной в точке a справа, если $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$. Функция f называется непрерывной в точке a слева, если $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$.

Пример. Покажем, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке 0 справа, т.е. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} = 0$.

◁ Берём малое число $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенств $0 < x < \varepsilon^2$ следует неравенство $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon$, так что в определении 8 и 7 можно взять $\delta = \varepsilon^2$. ▷

Теорема (о связи свойств непрерывности и односторонней непрерывности). Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда f непрерывна в x_0 одновременно слева и справа.

◁ Это утверждение есть прямое следствие критерия непрерывности функции в точке, в котором $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (см. пункт 3.3'), и предшествующей теоремы о связи односторонних пределов с пределом. ▷

Итак,
 f непрерывна в $x_0 \iff f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$. (9)

При вычислении конкретных пределов и при исследовании равенства конкретных функций полезны следующие теоремы следствия к ней.

Теорема (локальность предела). Если существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a функции g то существует $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

◁ Положим $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\dot{U}(a) = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$ и возьмём малое $\varepsilon > 0$. Тогда берём число $\delta_1 > 0$ таким, чтобы

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ для всех } x, 0 < |x - a| < \delta_1. \quad (10)$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, a - \alpha, \beta - a)$, $\delta > 0$. Тогда для всех x , $0 < |x - a| < \delta$. Закладываем, что: 1) $x \in \dot{U}(a)$ и $f(x) = g(x)$; и 2) справедливо утверждение (10). Поэтому, $|g(x) - l| = |f(x) - l| < \varepsilon$ для всех x , $0 < |x - a| < \delta$ и $l = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. ▷

Следствие. Если функция f непрерывна в точке x_0 и функция $g = f$ в некоторой окрестности точки x_0 , то g также непрерывна в точке x_0 .

Раздел II. Дифференциальное исчисление функций одного переменного.

Глава 1. Дифференцирование функций.

§1. Дифференцируемость и производная.

Одним из важнейших задач, для решения которых потребовалось создать дифференциальное исчисление, была задача о скорости неравномерного движения.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки. Введем на прямой относительно системы координат, и пусть t - время, отсчитываемое от какого-либо выбранного момента. Движение точки описывается уравнением $s = f(t)$, где s - координата точки в момент t . Разность $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$ - величина (алгебраическая) перемещение точки за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$.

Простейшее прямолинейное движение - равномерное, так называемое прямолинейное движение, при котором перемещение пропорционально затраченному на него времени; т.е., $\Delta s / \Delta t = v$, где v не зависит от t и Δt . Число v называется скоростью этого равномерного прямолинейного движения.

Движение, описываемое уравнением $s = f(t)$, равномерно тогда и только тогда, когда $f(t)$ - линейная функция. Действительно, пусть $s = f(t)$ - уравнение равномерного прямолинейного движения со скоростью v . Выберем какой-нибудь момент t_0 и пусть $s_0 = f(t_0)$. Тогда $s - s_0 = v(t - t_0)$; т.е., $f(t) = f(t_0) + v(t - t_0) = a + vt$, где $a = f(t_0) - vt_0$, так что f линейна. Обратно, пусть $s = f(t)$, где $f(t)$ - линейная функция; т.е., $f(t) = a + vt$, где a и v - постоянные. Тогда $\Delta s = v \cdot \Delta t$; т.е., Δs пропорционально Δt .

Значение равномерного прямолинейного движения определяется первым законом классической механики (известным уже Г. Галилею), согласно которому, если от начала с момента t_0 силы, приложенные к материальной точке, уравновесились, то далее она будет двигаться прямолинейно и равномерно. Скорость v этого равномерного прямолинейного движения называют скоростью точки в момент t_0 . Как показано выше, закон движения с момента t_0 был бы $f(t) = f(t_0) + v(t - t_0)$. Однако равнодействующая всех сил, приложенных в точке в данный момент, должна быть равна нулю. Рассмотрим, как это влияет на закон движения. Согласно представлению классической механики, движение складывается тогда из двух составляющих: первая - указанное равномерное прямолинейное движение со скоростью v , достигнутой в момент t_0 ; вторая - движение, которое вызвано от приложенных сил, если бы точка в момент t_0 покоилась. Но, как показал Галилей, такая свободная падение тела, если от равнодействующей приложенных сил, начиная с момента t_0 оставалась постоянной (и направленной по той же прямой), то отклонение точки от достигнутого положения $f(t_0)$ было бы

пропорционально этой равнодействующей и квадрату времени; т.е. имеем $\Delta x \propto (t-t_0)^2$, где коэффициент c_0 пропорционален равнодействующей. Таким образом, закон движения имеет вид

$$f(t) = f(t_0) + v(t-t_0) + c_0(t-t_0)^2,$$

Конечно, равнодействующая переменных сил, как правило, непостоянна. Но очевидно она непрерывно зависит от времени. Поэтому для значений t , достаточно близких к t_0 , значение пропорционального ей коэффициента с заданной в некотором интервале (a, b) погрешностью можно считать постоянным. Тогда действительная траектория движения должна проходить достаточно близко, поэтому для указанных значений t выполняются неравенства

$$f(t_0) + v(t-t_0) + a(t-t_0)^2 < f(t) < f(t_0) + v(t-t_0) + b(t-t_0)^2,$$

откуда $f(t) = f(t_0) + v(t-t_0) + c(t)(t-t_0)^2$, $a < c(t) < b$. Положим $\alpha(t) = c(t)(t-t_0)$, получим

$$f(t) = f(t_0) + v(t-t_0) + \alpha(t)(t-t_0), \quad (1)$$

где v — скорость движения в момент t_0 , а $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$, как предел ограниченной функции на бесконечно малую при $t \rightarrow t_0$, и функция $\alpha(t)$ непрерывна в точке t_0 , поскольку $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = 0 = \alpha(t_0)$. Однако и без последнего свойства функции $\alpha(t)$ (и без остальных возможных её свойств) ясно, что формулой (1) однозначно определено значение v , так как

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = v + \alpha(t), \quad t \neq t_0,$$

и $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = 0$, что

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \quad (2)$$

а предел функции в точке единственен.

Таким образом, задачу нахождения скорости прямолинейного движения можно свести к вычислению предела отношения приращений функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Это возможно в силу того, что рассматриваемая функция $f(t)$ в окрестности точки t_0 "почти линейна"; т.е. линейна с точностью до бесконечно малой относительно $t-t_0$.

Подробная ситуация встречается не только в механике, но и в самой математике, например, при рассмотрении задачи нахождения касательной к графику функции, как будет показано ниже в §. Это побуждает рассмотреть ситуацию в общем случае.

1.1. Дифференцируемость функции в точке.

Определение 1. Функцию f называют дифференцируемой в точке x_0 , если: 1) x_0 входит в область определения D_f функции f вместе с некоторой своей окрестностью $U(x_0) = (\alpha, \beta)$; т.е. $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset D_f$, и 2) для всех $x \in D_f$ функция f представима в виде

$$f(x) = f(x_0) + k(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0), \quad (3)$$

где число k не зависит от x , а $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и бесконечно малая функция $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0 ; т.е., $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 = \alpha(x_0)$.
Обозначение: $f \in \mathcal{O}(x_0)$.

Замечание 1. Поскольку поведение бесконечно малой ~~функции $\alpha(x)$~~ и непрерывной в точке x_0 функции $\alpha(x)$ полностью характеризуются ее значением в окрестности точки x_0 , то справедливость представления (3) в определении 1 достаточно потребовать только для точек $x \in U(x_0) = (\alpha, \beta)$.

Теорема 1. Если функция f дифференцируема в точке x_0 , то число k в представлении (3) единственное.

Пусть $f \in \mathcal{O}(x_0)$ и справедливо такое представление

$$f(x) = f(x_0) + k_1(x-x_0) + \alpha_1(x)(x-x_0), \quad x \in U(x_0), \quad (3')$$

в котором число k_1 не зависит от x и $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_1(x) = 0 = \alpha_1(x_0)$.

Объединяя (3) и (3') и проведя тождественные преобразования, получим

$$(k_1 - k)(x-x_0) = (\alpha(x) - \alpha_1(x))(x-x_0), \quad x \in U(x_0),$$

откуда, после деления на $(x-x_0)$, имеем $k_1 - k = \alpha(x) - \alpha_1(x)$ для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$, и $k_1 - k = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) - \alpha_1(x)) = 0$; т.е., $k_1 = k$. $\triangleright$

Теорема 2 (о связи свойств дифференцируемости и непрерывности функции). Функция f , дифференцируемая в точке x_0 , непрерывна в этой точке.

Пусть функция (3), $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. $\triangleright$

Замечание 2. Ниже, в пункте 1.3, мы покажем, что утверждение обратное теореме 2, не верно.

Для вычисления числа k в представлении (3) нам понадобится новое понятие производной функции в точке.

1.2. Производная.

Определение 1. Рассмотрим произвольную числовую функцию f и пусть точка x_0 входит в ее D_f вместе с некоторой своей окрестностью $U(x_0) = (\alpha, \beta)$; т.е., $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset D_f$. Тогда множество $D_f - \{x_0\}$ служит областью определения функции $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, называемой разностным отношением функции f в точке x_0 , и можно ставить вопрос о существовании предела новой функции при $x \rightarrow x_0$.

Определение 2. Число $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (если оно существует) называем производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (4)$$

при условии, что предел существует.

Таким образом, согласно формуле (2), скорость пряминейного движения есть производная перемещения, как функции времени. Также полезно, по аналогии с этим, трактовать и производную функции f в точке x_0 , как скорость изменения функции в этой точке.

Множество всех точек $x_0 \in D_f$, в которых существует $f'(x_0)$, служит областью определения для новой функции, называемой производной функцией для f и обозначаемой f' . Таким образом, область определения $D_{f'}$ производной функции f' содержится в области определения D_f исходной функции f и в каждой точке $x_0 \in D_{f'} \subset D_f$ функции f' принимает значение $f'(x_0)$, определяемое равенством (4).

Как отмечалось выше, у большинства функций, изучаемых в математическом анализе, областями определения служат промежутки или объединения промежутков. Поэтому областями определения большинства производных функций будут интервалы или объединения интервалов.

Формулу (4) придаёт также другой облик, если использовать обозначения $x - x_0 = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, и $y = f(x)$, $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, или, ещё проще, $\Delta x = h$, $x = x_0 + h$, $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \quad \text{и} \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Примеры: 1) Линейная функция $f(x) = kx + b$ имеет производную в каждой точке $x \in D_f = \mathbb{R}$ и её производная функция $(kx + b)' = k$ — постоянная.

Действительно,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(kx + b) - (kx_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x - x_0)}{x - x_0} = k$$

В частности, постоянная ($k=0$) имеет всюду производную, равную нулю, а тождественная функция ($k=1, b=0$) — производную, равную единице.

2) Функция $\sin x$ имеет производную в каждой точке $x \in D_{\sin} = \mathbb{R}$ и её производная функция $\sin' x = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

$$\sin' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h/2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos x,$$

Принимая следствием теорем 3 и 4 считаем такое важное

Утверждение. $f \in \mathcal{O}(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)$ где для всех $x \in U(x_0) = (\alpha, \beta) \subset D_f$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 = \alpha(x_0)$ (т.е. функция $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$ и непрерывная в x_0).

1.4. Критерий дифференцируемости функции в точке.

Теорема. Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset D_f$ и $f(x) - f(x_0) = k_f(x)(x-x_0)$ где для всех $x, x \in U(x_0) = (\alpha, \beta) \subset D_f$, а функция $k_f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $k_f(x_0) = f'(x_0)$.

Согласно последнему утверждению из пункта 1.3, $f \in \mathcal{O}(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha(x)](x-x_0) = k_f(x)(x-x_0)$ где для всех $x \in (\alpha, \beta) \subset U(x_0) \subset D_f$, а функция $k_f(x) = f'(x_0) + \alpha(x)$ непрерывна в x_0 , как сумма непрерывных функций, и $k_f(x_0) = f'(x_0)$. Δ

1.5. Правила дифференцирования функций.

Теорема (линейность операции дифференцирования). Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 , то для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ функция $h = \lambda_1 f + \lambda_2 g$ дифференцируема в x_0 и её производная $h'(x_0) = (\lambda_1 f + \lambda_2 g)'(x_0) = \lambda_1 f'(x_0) + \lambda_2 g'(x_0)$.

Приведенное ниже доказательство показывает, что свойство линейности операции дифференцирования есть следствие свойства линейности предела функции в точке.

Так как, по условию, $f, g \in \mathcal{O}(x_0)$, то существуют интервалы $(\alpha_1, \beta_1) = U_1(x_0) \subset D_f$ и $(\alpha_2, \beta_2) = U_2(x_0) \subset D_g$ и существуют

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}.$$

Тогда интервал $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2) = U_1(x_0) \cap U_2(x_0)$ образует некоторую окрестность $U(x_0) = (\alpha, \beta)$ точки x_0 и $(\alpha, \beta) = U_1(x_0) \cap U_2(x_0)$ содержится в $D_f \cap D_g = D_{\lambda_1 f + \lambda_2 g} = D_h$. Кроме того, в силу свойства линейности предела функции в точке, существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\lambda_1 f(x_0 + \Delta x) + \lambda_2 g(x_0 + \Delta x)] - [\lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 g(x_0)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\lambda_1 \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lambda_2 \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right] = \lambda_1 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \quad (6)$$

$$+ \lambda_2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \lambda_1 f'(x_0) + \lambda_2 g'(x_0).$$

На основании формулы (6) и определения 2, заключаем, что $\lambda_1 f'(x_0) + \lambda_2 g'(x_0) = h'(x_0) = (\lambda_1 f + \lambda_2 g)'(x_0)$. Δ

Теорема (производная произведения). Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 , то $h = fg$ также дифференцируема в x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Согласно определению 1, $x_0 \in (\alpha_1, \beta_1) \subset D_f$ и $x_0 \in (\alpha_2, \beta_2) \subset D_g$, так что $x_0 \in (\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2) \subset D_g \cap D_f = D_{fg} = D_h$. Согласно критерию дифференцируемости функции в точке (см. пункт 1.4), $f(x) - f(x_0) = k_f(x)(x - x_0)$, $x \in (\alpha, \beta) \subset (\alpha_1, \beta_1)$, и $g(x) - g(x_0) = k_g(x)(x - x_0)$, $x \in (\alpha, \beta) \subset (\alpha_2, \beta_2)$, где функции k_f и k_g непрерывны в точке x_0 и $k_f(x_0) = f'(x_0)$, $k_g(x_0) = g'(x_0)$.

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = [f(x_0) + k_f(x)(x - x_0)] \cdot [g(x_0) + k_g(x)(x - x_0)] - \\ &- f(x_0)g(x_0) = k_f(x)g(x_0)(x - x_0) + k_g(x)f(x_0)(x - x_0) + k_f(x)k_g(x)(x - x_0)^2 = \\ &= [k_f(x)g(x_0) + k_g(x)f(x_0) + k_f(x)k_g(x)](x - x_0) = k_h(x)(x - x_0), x \in (\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку функции $k_h(x) = k_f(x)g(x_0) + k_g(x)f(x_0) + k_f(x)k_g(x)(x - x_0)$ непрерывны в точке x_0 (как сумма непрерывных функций), то на основании формулы (7) и критерия дифференцируемости функции в точке (пункт 1.4), заключаем, что функция $h = fg$ дифференцируема в точке x_0 и её производная $h'(x_0) = (fg)'(x_0) = k_h(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$.

Теорема (производная отношения функции). Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad (8)$$

Как и в доказательстве предыдущей теоремы убеждаемся, что из условия $f, g \in D(x_0)$ следует существование интервала (α, β) , что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset D_f \cap D_g$, и

$$f(x) - f(x_0) = k_f(x)(x - x_0), g(x) - g(x_0) = k_g(x)(x - x_0), x \in (\alpha, \beta); \quad (9)$$

функции k_f и k_g непрерывны в точке x_0 и $k_f(x_0) = f'(x_0)$, $k_g(x_0) = g'(x_0)$. Кроме того, по теореме 2 пункта 1.1, функция g непрерывна в x_0 , и поскольку $g(x_0) \neq 0$, то, по теореме о сохранении знака непрерывной функции, $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0 , которую, не ограничивая общности, можно считать совпадающей с интервалом (α, β) , так что $(\alpha, \beta) \subset D_{f/g}$ (по определению множества $D_{f/g}$). Окончательно, для всех $x \in (\alpha, \beta)$ справедливы формулы (9) и $g(x) \neq 0$.

$$\text{Тогда } \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{g(x)g(x_0)} = \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - (g(x) - g(x_0))f(x_0)}{g(x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{g(x_0)k_f(x) - f(x_0)k_g(x)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0) = k(x)(x - x_0), x \in (\alpha, \beta). \quad (10)$$

Функция $k(x) = \frac{g(x_0)k_f(x) - f(x_0)k_g(x)}{g(x)g(x_0)}$ непрерывна в точке x_0 по

свойствам непрерывности функций, и следовательно формула (10) и критерий дифференцируемости функции в точке (пункт 1.4) показывают, что функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке x_0 и что $k(x_0) = (\frac{f}{g})'(x_0)$, откуда $(\frac{f}{g})'(x_0) = k(x_0) = \frac{g(x_0)k_f(x_0) - f(x_0)k_g(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, т.е. справедлива формула (8). $\triangleright$

Следствие. Если $g \in D(x_0)$ и $g(x_0) \neq 0$, то $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

$\triangleleft$ В предположении теоремы выберем $f(x) = 1$ и $f'(x) = 0$ для всех x . $\triangleright$

Примеры. 1) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ Докажем это с помощью метода математической индукции. Если $n=1$, то $x^n = x$ и $(x^n)' = (x)' = 1$ (см. пример 1) из пункта 1.2). Если формула верна для $k \in \mathbb{N}$, то по теореме о производной произведения, $(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k (x)' = k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k = (k+1)x^k$; т.е. формула верна для $(k+1) \in \mathbb{N}$, что завершает доказательство. $\triangleright$

2) $(\frac{1}{x^n})' = -\frac{n}{x^{n+1}}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ Согласно следствию к теореме о производной частного и предыдущему примеру, $(\frac{1}{x^n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$, $x \neq 0$. $\triangleright$

В частности, $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

Теорема (о производной сложной функции) Если функция g дифференцируема в точке $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset D_g$, а функция f дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0) \in (a, b) \subset D_f$, то $f \circ g$ дифференцируема в x_0 и $(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$.

$\triangleleft$ Так как $f \in D(y_0)$, то по критерию дифференцируемости функции (пункт 1.4),

$$f(y) - f(y_0) = k_f(y)(y - y_0), \quad y \in (a, b) \subset D_f, \quad (11)$$

где k_f непрерывна в y_0 и $k_f(y_0) = f'(y_0)$. Так как $g \in D(x_0)$, то g непрерывна в x_0 , так что для числа $y_0 = g(x_0)$ и его окрестности $U(y_0) = (a, b)$ можно указать такую окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , в которой $y = g(x) \in U(y_0) = (a, b)$ для всех $x \in U(x_0)$ (на основании непрерывности функции в точке). Не ограничивая общности, считаем $U(x_0) = (\alpha, \beta)$, так что $y = g(x) \in (a, b)$ для всех $x \in (\alpha, \beta) \subset D_g$. Кроме того,

$$g(x) - g(x_0) = k_g(x)(x - x_0), \quad x \in (\alpha, \beta) \subset D_g, \quad (12)$$

где функция $k_g(x)$ непрерывна в x_0 и $k_g(x_0) = g'(x_0)$. Объединив формулы (11) и (12), получим формулу

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = k_f(g(x))(g(x) - g(x_0)) = k_f(g(x))k_g(x)(x - x_0) = k(x)(x - x_0), \quad (13)$$

справедливую для всех $x \in (\alpha, \beta) \subset D_{f \circ g}$. Сложная функция $k_f(g(x))$ непрерывна в x_0 , и следовательно, в x_0 непрерывна функция $k(x) = k_f(g(x))k_g(x)$. Поэтому, на основании формулы (13) и критерия дифференцируемости функций в точке, заключаем, что $f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и $(f \circ g)'(x_0) = k(x_0) = k_f(g(x_0))k_g(x_0) = k_f(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$. $\triangleright$

Пример. Функция $f(x) = \cos x$ дифференцируема для всех $x \in \mathbb{R} = D_{\cos}$
и $\cos' x = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.

$\Delta \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $x \in \mathbb{R}$, и согласно примеру 2) из пункта 1.2, и пред-
пущен теореме, $\cos' x = \sin'(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2})' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Теорема (о производной обратной функции). Если f и g - взаимно
обратные функции, функции f дифференцируема в точке x_0 , $f(x_0) = y_0$,
и её производная $f'(x_0) \neq 0$, то g дифференцируема в $y_0 = f(x_0)$ и её
производная $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$.

Δ Это условие $f'(x_0) \neq 0$ и поэтому

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \quad (14)$$

Проверим, что в пределе (14) можно сделать замену $x = g(y)$. Действительно,
а) $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ и $x_0 = g(y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$ (так как f и g - вза-
имно обратные); б) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$, так как дифференцируемая
в x_0 функция f непрерывна в x_0 ; в) поскольку $f'(x_0) \neq 0$, то из
(14) следует, что при $x \in U(x_0)$ и $x \neq x_0$ также $y = f(x) \neq f(x_0) = y_0$.
Таким образом выполнены все условия теоремы о замене перемен-
ной в пределе функции в точке, согласно которой

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0). \quad \triangleright$$

1.6. Таблица производных функций.

Рассмотренные выше правила дифференцирования позволяют составить
таблицу производных элементарных функций.

I. $C = 0$ для любой постоянной $C \in \mathbb{R}$; II. $(x)' = 1$;

III. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; IV. $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

V. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$\Delta (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \triangleright$$

VI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\Delta (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad \triangleright$$

VII. $(a^x)' = a^x \ln a$, $0 < a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$; в частности, $(e^x)' = e^x$.

Δ Согласно определению производной и следствию ко второму замеща-
тельному пределу

$$(a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a. \quad \triangleright$$

VIII. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $0 < a \neq 1$, $x > 0$; в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$

Δ Согласно определению производной и следствию ко второму замеща-
тельному пределу

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{h/x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

По определению, $\log_a x = \alpha \ln x$, где $\alpha = \frac{1}{\ln a}$, и следовательно, $(\log_a x)' =$
 $\alpha (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad \triangleright$

$$\text{IX. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

△ Функции $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, и $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, — взаимно обратные, так что $\operatorname{tg} g(x) = x$, и $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$. По теореме о дифференцируемости обратной функции,

$$(\operatorname{arctg} x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 g(x)} = \frac{1}{1+x^2}. \triangleright$$

$$\text{X. } (\operatorname{arcsctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

△ Функции $g(x) = \operatorname{arcsctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, и $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$, — взаимно обратные, так что $\operatorname{ctg} g(x) = x$, и $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) < 0$. По теореме о производной обратной функции,

$$(\operatorname{arcsctg} x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = -\frac{1}{(1 + \operatorname{ctg}^2 g(x))} = -\frac{1}{1+x^2}. \triangleright$$

$$\text{XI. } (\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

△ Функции $g(x) = \operatorname{arcsin} x$, определенная на $[-1, 1]$, и функции $f(x) = \sin x$, рассматриваемая на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, — взаимно обратные, так что $\sin g(x) = x$, и в каждой точке x из интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ выполнены все условия теоремы о производной обратной функции ($f'(x) = \cos x > 0$). Поэтому,

$$(\operatorname{arcsin} x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos g(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

так как $\cos g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 g(x)} = \sqrt{1-x^2}$, и знак перед корнем выбран "+", поскольку $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsin} x = g(x) \leq \frac{\pi}{2}$, и следовательно, $\cos g(x) \geq 0$. $\triangleright$

$$\text{XII. Аналогично, } (\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

$$\text{XIII. } (x^a)' = ax^{a-1}, x > 0, a \in \mathbb{R} \text{ — фиксировано.}$$

△ По определению, $x^a = e^{a \ln x}$, и следовательно,

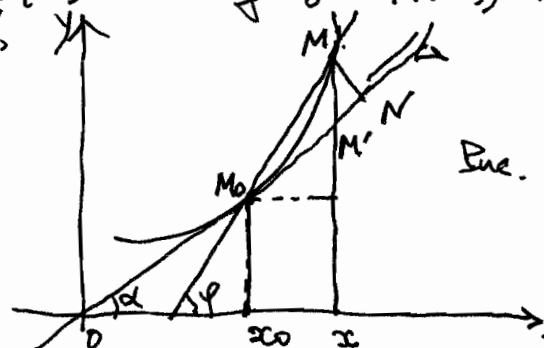
$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}. \triangleright$$

1.7. Геометрический смысл производной.

Рассмотрим функцию f , непрерывную на промежутке $\langle a, b \rangle$, $a < b$, и её график $\Gamma = \{(x, y); y = f(x), x \in \langle a, b \rangle\}$ на координатной плоскости $\Pi: Oxy$. Фиксируем точку x_0 в интервале (a, b) и точку $M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ и рассмотрим произвольную точку $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $x \in \langle a, b \rangle$. Тогда $|MM_0| = \sqrt{(f(x) - f(x_0))^2 + (x - x_0)^2}$ и $|MM_0| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 3. Касательной к графику Γ в его точке M_0 называем такую прямую Δ на Π , проходящую через M_0 , у которой расстояние $|MN|$ от произвольной точки $M \in \Gamma$ до прямой Δ сравнимо с $|MM_0|$ отношением $\frac{|MN|}{|MM_0|} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$

(см. рис.).



Теорема Если функция f дифференцируема в точке x_0 , то её график Γ имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$.

Так как $f \in \mathcal{D}(x_0)$, то справедливо представление (*) из доказательства теоремы 4:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad x \in \langle a, b \rangle, \quad (15)$$

в котором $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ($= \alpha(x_0)$). Прямая L , задаваемая уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

проходит через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ (координаты этой точки удовлетворяют уравнению (16)) и имеет угловой коэффициент $f'(x_0)$. Рассмотрим произвольную точку $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $x \in \langle a, b \rangle$, $x \neq x_0$, и обозначим через N проекцию точки M на прямую L , задаваемую уравнением (16), и через M' — точку на прямой L с абсциссой x . (см. рис.) Тогда

$$|MM'| = |y - f(x)| = |\alpha(x)(x - x_0)| \quad (\text{в силу (15) и (16)}) \quad \text{и} \quad |MN| \leq |MM'|,$$

а $|MM_0| \geq |x - x_0|$. Поэтому,

$$\frac{|MN|}{|MM_0|} \leq \frac{|MM'|}{|x - x_0|} = |\alpha(x)| \quad \text{и так как} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |\alpha(x)| = 0, \quad \text{то}$$

$$\frac{|MN|}{|MM_0|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0; \quad \text{т.е., прямая } L, \text{ задаваемая уравнением (16),}$$

по определению 3, есть касательная к графику Γ функции f в точке $M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$. $\triangleright$

Замечание. Угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \varphi$ секущей прямой

M_0M , как известно из аналитической геометрии, равен разности координат

отношению $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Таким образом, теорема показывает, что

угловой коэффициент $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ касательной в точке $M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$

(см. рис.) равен пределу углового коэффициента $k = \operatorname{tg} \varphi$ секущей M_0M

при $x \rightarrow x_0$; т.е., $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$ при $x \rightarrow x_0$. В силу непрерывности функции arctg ,

заключаем, что $\varphi \rightarrow \alpha$ при $x \rightarrow x_0$. Последнее заключение

~~качественно~~ имеет качественную формулировку: "касательная есть

предельное положение секущей". В такой формулировке понятие

касательной распространяется на любые кривые (не обязательно являющиеся графиками непрерывных функций).

1.7. Бесконечные производные и другие замечания.

Если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty$, то говорят, что функция f имеет в точке x_0 бесконечную производную. В этом случае касательная к графику функции f в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ расположена вертикально. Например, для функции $y = \sqrt[3]{x}$ имеем $y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \infty$, и график имеет вертикальную касательную, совпадающую с осью Oy .

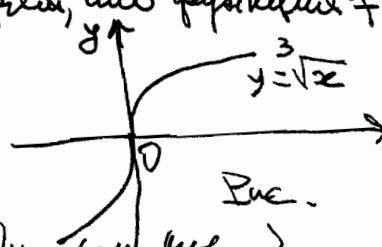


Рис.

(см. рис.)

Функция $f(x) = |x|$ не имеет производной при $x=0$ (см. пример 3 в пункте 1.2). Геометрически это означает, что график функции $f(x) = |x|$ не имеет касательной в точке $O(0,0)$; он имеет в нуле "угловую точку".

Рассмотрим, наконец, такой

Пример. Существование функции, непрерывные и дифференцируемые только в одной точке, и разрывные во всех остальных точках на $\mathbb{R}$.

1 Рассмотрим функцию Дирихле $D(x)$,

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{Q} - \text{рациональное,} \\ 1, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} - \text{иррациональное.} \end{cases}$$

В силу свойства множества иррациональных и рациональных чисел, для любого $x \in \mathbb{R}$ можно указать последовательности (x'_n) и (x''_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x$, в которых все $x'_n \in \mathbb{Q}$, а $x''_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ и так как $0 \neq 1$, то функция $D(x)$ не непрерывна (разрывна) во всех точках $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Функция $f(x) = x^2 D(x)$ дифференцируема (и следовательно, непрерывна) в точке $x_0 = 0$, поскольку по определению 2 существует

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 D(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x D(x) = 0$$

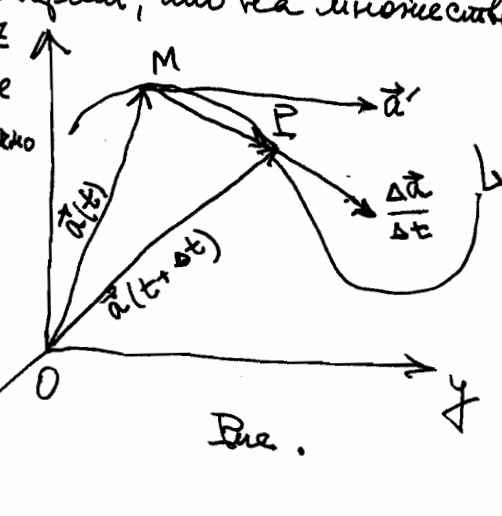
(как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограничения).

С другой стороны, функция f разрывна во всех точках $x \neq 0$ ($=x_0$), поскольку, если бы f была непрерывной в какой-то точке $x_1 \neq 0$, то в $x_1 \neq 0$ была бы непрерывной и функция $D(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ (как отношение двух непрерывных функций в точке, где знаменатель отличен от нуля, $x_1^2 > 0$), что неверно. $\Rightarrow$

1.8. Производная векторной функции.

Всем каждому значению переменного t из некоторого числового множества E ставится в соответствие по известному закону определенный вектор $\vec{a}$ трехмерного пространства, то есть, что на множестве E задана векторная функция $\vec{a} = \vec{a}(t)$.
Так как каждый вектор $\vec{a}$ в заданной в пространстве декартовой прямоугольной системе координат однозначно определяется тремя координатами x, y и z , то задание векторной функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ эквивалентно заданию трех скалярных (числовых) функций $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in E$.

Понятие векторной функции приобретает особую наглядность при рассмотрении ее графика (т.е. геометрического места концов всех векторов $\vec{a} = \vec{a}(t), t \in E$, приложенных к началу координат O . На рис. кривая Γ



представляет собой график векторной функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$, однозначно определен-
ный E которой служит некоторый невырожденный промежуток I .

Введем понятие производной векторной функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ в произвольной
выбранной точке t промежутка I .

Взяв для аргумента в точке t произвольное приращение $\Delta t \neq 0, t + \Delta t \in I$, и рассмотрим соответствующий вектор приращения $\Delta \vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$.

На рис. указанный вектор совпадает с $\vec{MP}$.

Умножив указанный вектор на число $\frac{1}{\Delta t}$, мы получим новый вектор

$$\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)], \quad (17)$$

коллинеарный приращению. Вектор (17) является аналогом разностного отноше-
ния для числовых функций.

Вектор (17) представляет собой среднюю скорость изменения вектор-
ной функции на отрезке $[t, t + \Delta t]$.

Определение 4. Производной векторной функции $\vec{a}(t)$ в точке t нази-
ваем предел при $\Delta t \rightarrow 0$ вектора (17) (при условии, что этот предел существует).

Для обозначения производной векторной функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ используем
символы $\vec{a}'(t)$ и $\frac{d\vec{a}}{dt}$.

Из геометрических соображений следует, что производная векторной
функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ представляет собой вектор, касательный к графику
этой функции.

Так как координаты разностного отношения (17) равны соответ-
ственно

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t},$$

то понятно, что координаты производной $\vec{a}'(t)$ равны производным
 $x'(t), y'(t), z'(t)$. Таким образом, вычисление производных векторных
функций сводится к вычислению производных ее координат.

Замечание. Так как векторная функция $\vec{a} = \vec{a}(t)$ определяет
закон движения материальной точки по кривой L , представляющей
собой график этой функции, то производная $\vec{a}'(t)$ равна скорости
движения по указанной кривой.

§2. Производные высших порядков.

2.1. Новейшие производные.

Производная f' функции f , в свою очередь, может иметь производную. Последнюю в этом случае называют второй производной (или производной второго порядка) функцией f и обозначают обычно f'' . Таким образом, $f'' = (f')'$. В соответствии с этим f' называют первой производной (или производной первого порядка) функцией f . По индукции определяются (в предположении, что они существуют) производные следующих порядков: $f''' = (f'')'$ и т.д. Если f имеет k -ю производную (значит, и производные всех меньших порядков), во всех точках некоторого промежутка I , то говорят, что f k -раз (или, k -кратно) дифференцируема на I . Функцию f , имеющую на I производные всех порядков, называют бесконечно дифференцируемой на I . Таковы, например, на всем $\mathbb{R}$ алгебраические многочлены, экспоненциальная функция, тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$, как это будет установлено ниже в пункте 2.2.

Для обозначения порядка производной, если он не велик, используют так же римские цифры. Так, f^{IV} — четвертая производная функции f . Вообще же n -ую производную функции f обозначают $f^{(n)}$ (в частности $f^{(1)} = f'$). При этом удобно саму функцию f обозначать символом $f^{(0)}$. Поэтому $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ для всех $k, 0 \leq k \leq n$.

Вторая производная имеет важный механический смысл. Если движение материальной точки описывается уравнением $s = f(t)$, то, как было показано, $v = f'(t)$ — скорость точки в момент t . Величину $j = f''$ ("споро-рость изменения скорости") называют ускорением точки в момент t . Согласно третьему закону классической механики, сила F , приложенная в точке, пропорциональна ускорению; т.е., $F = mj$, и коэффициент пропорциональности m называют массой точки.

2.2. Производные n -го порядка элементарных функций.

Для некоторых бесконечно дифференцируемых функций легко указать формулу для вычисления n -ой производной.

Предварительно условимся произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ первых n натуральных чисел обозначать символом $n!$ (читается: "эн факториал"), так что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, и считать, что $0! = 1$. Тогда $n! = n \cdot (n-1)!$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $n! = n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k)!$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$.

I. Пусть $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$ — фиксировано, $x \in \mathbb{R} = D_f$. Последовательно дифференцируя, получим

$$(x^n)' = n x^{n-1}, (x^n)'' = n(n-1) x^{n-2}, (x^n)''' = n(n-1)(n-2) x^{n-3},$$

и вообще,

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} \text{ для всех } k, 1 \leq k \leq n, \text{ и } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Если считать $x^0 = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то формула (1) справедлива также для $k = n$ и имеет вид $(x^n)^{(n)} = n(n-1) \cdots 1 = n!$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому все последующие производные функции x^n равны нулю для всех $x \in \mathbb{R}$; т.е., $(x^n)^{(m)} = 0$ для всех $m > n$ и всех $x \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ — фиксировано. Тогда получим формулу

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) x^{\alpha-n}, \quad (2)$$

справедливо для всех тех $x \in D_f$ и $n \in \mathbb{N}$, где левая часть имеет смысл, т.е., где $x \in D_f \setminus \{0\}$, а если $0 < n < \alpha$, то и где $x = 0$. При $\alpha = -1$ формула (2) принимает вид

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}. \quad (2')$$

II. Если $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R} = D_f$, то $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$, и вообще,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

III. Если $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R} = D_f$, то $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = (\cos(x + \frac{\pi}{2}))' = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$, и вообще,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

IV. Если $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $f'(x) = a^x \ln a$, $f''(x) = a^x \ln^2 a$, и вообще,

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (5')$

V. Если $f(x) = \ln x$, $x > 0$, то $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, и поэтому, согласно формуле (2'),

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}, \quad x > 0, n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

2.3. n-ая производная произведения.

Выведем формулу Лейбница для n-ой производной произведения двух n-кратно дифференцируемых функций.

И здесь напомним с предварительных результатов. Числа $\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$ считаются: "из прописки из эн по ка", или, короче, "из эн по ка", в силу договоренности в пункте 2.1 о свойствах факториала, существующей для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, и всех k , $0 \leq k \leq n$. Числа C_n^k называют биномиальными коэффициентами; возникновение этого наименования объяснено в последнем пункте этого параграфа.

Поскольку $0! = 1$ и $n! = n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)!$ для всех k , $0 \leq k \leq n$, то

$$C_n^0 = C_n^n = 1, n = 0, 1, 2, \dots; \text{ и } C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}, 1 \leq k \leq n. \quad (7)$$

Биномиальные коэффициенты C_n^k связаны соотношением

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k \quad (n \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n). \quad (8)$$

Согласно (7),

$$\begin{aligned} C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n! \cdot k}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned} \quad \triangleright$$

Теорема (Г. Лейбниц). Если функции f и g на промежутке I n -кратно дифференцируемы, то то же верно для их произведения fg , причем

$$(fg)^{(n)} = f \cdot g^{(n)} + n f' g^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f'' g^{(n-2)} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} f^{(k)} g^{(n-k)} + \dots + n f^{(n-1)} g' + f^{(n)} g = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}, \quad (9)$$

где использованы формулы (*) и договоренность, что $f^{(0)} = f$ и $g^{(0)} = g$.

Для $n=1$ утверждение справедливо в силу формулы ~~произведения~~ производной произведения двух дифференцируемых функций:

$$(fg)' = f g' + f' g = C_1^0 f^{(0)} g^{(1)} + C_1^1 f^{(1)} g^{(0)} = \sum_{k=0}^1 C_1^k f^{(k)} g^{(1-k)}.$$

Пусть утверждение справедливо для n , а функции f и g на I $(n+1)$ -кратно дифференцируемы. Тогда эти функции вместе со ~~своими~~ ~~производными~~ своим произведением n -кратно дифференцируемы на I и справедлива формула (9). Так как в каждой члене правой части формулы (9) функции $f^{(k)}$ и $g^{(n-k)}$ дифференцируемы, то дифференцируема и функция $(fg)^{(n)}$ в левой части (9), придем

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(k+1)} g^{(n-k)}) = \\ = C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)}. \quad (10)$$

Положим $l = k+1$, $k = l-1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} = \sum_{l=1}^n C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n-l+1)} = \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)}. \quad (11)$$

Подставив (11) в (10) и замечая, что $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$ и $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$ и что справедлива формула (8), имеем

$$(fg)^{(n+1)} = C_{n+1}^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n [C_n^k + C_n^{k-1}] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} = \\ = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)};$$

т.е., формулу (9) для $n+1$. Δ

2.4. Формула Тейлора для алгебраического многочлена.

Теорема. Коэффициенты многочлена

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

однозначно определяются значениями этого многочлена и его производных в точке $x=0$, а именно

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

так что

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (13)$$

(4)

4. При k -кратном дифференцировании многочлена $P(x)$ по x члены, степени которых меньше k , пропадут и

$$P^{(k)}(x) = k! a_k + (k+1)k \dots 2 a_{k+1} x + \dots + n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k}$$

где для всех $k, 1 \leq k \leq n$. Положив $x=0$, получим $P^{(k)}(0) = k! a_k$, откуда и следующая формулы (12) и (13). ▽

Формулу (13) называют формулой Тейлора-Маклорена для алгебраических многочленов.

Следствие. Если $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$, то $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

2.5. Формула Бинета.

Из формулы Тейлора-Маклорена легко получить, в частности, разложение $(a+x)^n$ по степеням x . Многочлен $P(x) = (a+x)^n$ имеет степень n ; т.е., представим в виде

$$(a+x)^n = P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

где a_k — положительные коэффициенты. По формуле (12), $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Но $P^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)(a+x)^{n-k}$ где для всех $k, 1 \leq k \leq n$. (14)

Действительно, $P'(x) = n(a+x)^{n-1}(a+x)' = n(a+x)^{n-1}$, так что формула (14) доказана для $k=1$. Если она доказана для $k < n$, то

$$P^{(k+1)}(x) = (n(n-1) \dots (n-k+1)(a+x)^{n-k})' = n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)(a+x)^{n-k-1},$$

т.е., формула (14) верна при замене в ней k на $k+1$.

Итак,

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} a^{n-k} = C_n^k a^{n-k},$$

и

$$(a+x)^n = P(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k.$$

Положив в последней формуле $x=b$, получим формулу Бинета

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

§3. Теорема Ферма и её следствия.

3.1. Точки экстремума.

Определение 1. Точку x_0 называют точкой максимума (точкой минимума) функции f , а $f(x_0)$ — максимумом (минимумом) этой функции, если в Df содержится такой интервал U , что $x_0 \in U$ (т.е., U — окрестность точки x_0) и $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) для всех $x \in U$. Если при этом $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) для всех $x \in U$ отличных от x_0 , то x_0 называют точкой строгого максимума (строгого минимума) функции f .

Замечания: 1°. Максимум (минимум) не обязательно наибольшее (наименьшее) из всех значений функции (рис. 1)



Рис. 1



Рис. 2

2°. Точка максимума (минимума) не обязательно единственная. Так, у $\sin x$ тех и других бесконечное множество.

3°. Некоторые максимумы могут быть меньше иных минимумов (рис. 2). Эти замечания подчеркивают, что понятия максимума или минимума — чисто локальные.

Определение 2. Точки максимума и минимума функции называют её точками экстремума.

Замечание. Согласно определениям 1 и 2 в проколотой окрестности U точки x_0 локального экстремума функции f разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет постоянный знак.

3.2. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.

Теорема (т. Ферма). Если x_0 — точка экстремума функции f и f дифференцируема в x_0 , то $f'(x_0) = 0$.

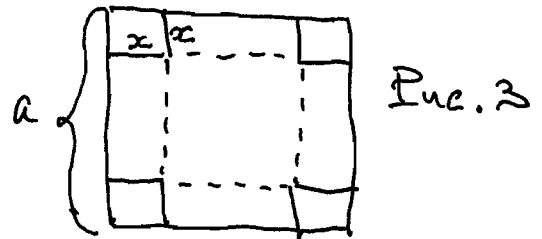
◁ Если предположить, что $f'(x_0) \neq 0$, то по свойству сохранения знака предела $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ разностное отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ обязано сохранять постоянный знак (знак числа $f'(x_0)$) в некоторой проколотой окрестности U точки x_0 , содержащейся в Df . Поскольку знаменатель $x - x_0$ меняет знак при переходе через точку x_0 , то же обязан делать числитель $f(x) - f(x_0)$, что противоречит свойству локального экстремума функции f в точке x_0 , отмеченному в замечании к определению 2. ▷

Так как симметрически значение $f'(x)$ производной в точке x задаёт угловой коэффициент $k(x) = f'(x)$ касательной к графику функции f в точке $M(x, f(x))$, то касательная в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ абсцисса x_0 которой есть точка локального экстремума

дифференцируемой функции f , имеет $K(x_0) = f'(x_0) = 0$, и следовательно K перпендикулярна оси абсцисс (рис. 1 и 2).

Теорему Ферма можно использовать при решении некоторых задач на нахождение наибольшего или наименьшего значения.

Пример. Из квадратного куска картона со сторонами a надо вырезать по углам четыре одинаковых квадратика так, чтобы согнуть оставшиеся части квадрата по линиям, отмеченным на рис. 3 пуктирами, и получить открытую сверху коробку наибольшего объема.



△ Вычислим объем V коробки при произвольной стороне x вырезаемых квадратиков:

$$V = f(x) = x(a - 2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

где по условию заданы $D_f = (0, \frac{a}{2})$. Функция f дифференцируема, причем $f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = (6x - a)(2x - a)$. Но функция f определена и на $[0, \frac{a}{2}]$ и будет там непрерывной, имеет на $[0, \frac{a}{2}]$ наибольшее значение (по второй теореме Вейерштрасса). Но на концах отрезка $f(x) = 0$, а внутри $f(x) > 0$. Таким образом, наибольшее значение достигается внутри отрезка и тем самым является также наибольшим значением функции f на интервале $(0, \frac{a}{2})$. Следовательно, по теореме Ферма, в точке x , где f достигает наибольшего значения на этом интервале, $f'(x) = 0$. Но f' обращается в ~~нуль~~ в указанном интервале в нуль только в точке $x = \frac{a}{6}$. Итак, коробка имеет наибольшее значение именно при $x = \frac{a}{6}$ и $V_{\max} = \frac{2}{27}a^3$ куб. ед. длины. ▽

Упражнение. Решить аналогичную задачу для прямоугольного куска картона со сторонами a и b .

3.3. Теорема Лагранжа о среднем значении

Теорема. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a < b$, и дифференцируема в интервале (a, b) , то для хотя бы одной точки $\xi \in (a, b)$ выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \text{ или } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (1)$$

△ На $[a, b]$ рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \lambda x$, в которой число λ выберем из условия $g(a) = g(b)$. Тогда $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$ и $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Функция g непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b) и $g'(x) = f'(x) - \lambda$ для всех $x \in (a, b)$. Согласно второй теореме Вейерштрасса, существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2)$ для всех $x \in [a, b]$. Если $g(x_1) = g(x_2)$, то функция g — постоянная, и поэтому, $g'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, так что $f'(x) - \lambda = 0$ и $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ для всех $x \in (a, b)$. Пусть теперь $g(x_1) \neq g(x_2)$. Так как $g(a) = g(b)$, то хотя бы одна из точек $x_i, i = 1, 2$, обязана лежать в интервале (a, b) ; обозначим её $\xi, \xi \in (a, b)$. По определению, ξ — точка экстремума функции g , и так как существует $g'(\xi)$, то по теореме

Теорема $f'(\xi)=0$, так что $f(\xi)-\lambda=0$ и $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. Δ
 Симметрически теорема Лагранжа означает, что при выполнении её условий хотя бы в одной внутренней точке графика функции f (т.е. в точке графика, соответствующей внутренней точке интервала (a,b)) касательная параллельна соединяющей его хорде (рис. 4). Действительно, в левой части равенства

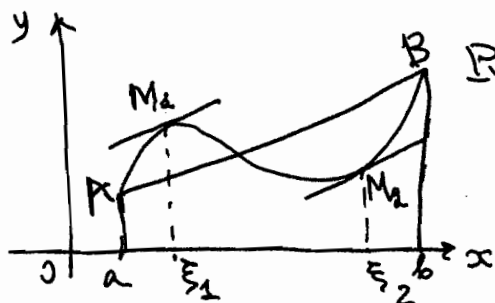


Рис. 4.

(1) состоит изовой координатой этой хорды, а в правой — изовой координатой касательной к графику в его точке $M(\xi, f(\xi))$.

Следствие 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a < b$, дифференцируема в интервале (a, b) и $f(a)=f(b)$, то $f'(\xi)=0$ хотя бы в одной внутренней точке ξ интервала (a, b) .

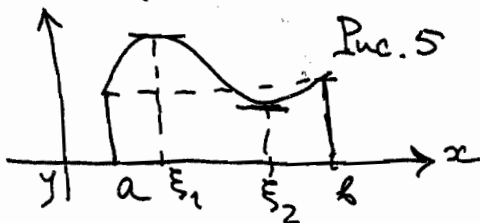


Рис. 5.

Симметрически следствие 1 означает, что при выполнении его условий хотя бы в одной внутренней точке графика касательная параллельна оси абсцисс (рис. 5).

Следствие 2. Между любыми двумя корнями дифференцируемой функции, заданной на промежутке, лежит хотя бы один корень её производной.

Следствие 3 (Ролль). Между любыми двумя корнями алгебраического многочлена степени $n \geq 2$ содержится хотя бы один корень его производной.

$\Rightarrow$ заключение этого пункта укажем кратко используемую локальную форму теоремы Лагранжа.

Теорема. Если функция f дифференцируема в интервале (a, b) и $x, x+h \in (a, b)$, то

$$f(x+h) - f(x) = f'(x + \theta h) \cdot h, \quad 0 < \theta < 1, \quad (1')$$

— формула конечных разностей.

3.4. Теорема Коши о среднем значении.

Теорема. Если функции f, g непрерывны на отрезке $[a, b]$, $a < b$, дифференцируемы в интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то в некоторой точке $\xi \in (a, b)$ справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (2)$$

Δ Так как, по условию $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то, согласно свойству 1 к теореме Лагранжа, $g(b) \neq g(a)$, и следовательно, имеет смысл обе части в формуле (2). На $[a, b]$ рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, в которой число λ ~~выберем~~ выберем из условия $F(a) = F(b)$. Тогда $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$ и $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Функция

$F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b) и $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Кроме того, для выбранного числа λ , $F(a) = F(b)$. Согласно следствию 1, $F'(\xi) = 0$ в некоторой точке $\xi \in (a, b)$, откуда $f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$, что равносильно формуле (2). $\square$

3.5. Правило Лопиталя - Бернулли раскрытия неопределённости типа $\frac{0}{0}$.

Производные - пределы типа $\frac{0}{0}$. Оказывается, что их можно использовать для нахождения более сложных пределов этого типа (а также для раскрытия неопределённостей других типов).

Продемонстрируем это утверждение в конкретном случае, тем не менее часто встречающемся в приложениях.

Теорема. Если функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$ и обладают свойствами:

1) f и g дифференцируемы в $\dot{U}(a)$, причём производная $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in \dot{U}(a)$; 2) существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ и 3) существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Из условия 1) следует, что f и g непрерывны в $\dot{U}(a)$. Неопределённость этих функций в точке $x=a$ означившим $f(a)=0, g(a)=0$, на основании условия 2), получим непрерывные функции f и g как в самой точке $x=a$, так и в её проколотой окрестности $\dot{U}(a)$. Кроме того, поскольку $g'(x) \neq 0, x \in \dot{U}(a)$, и по определению $g(a)=0$, то в силу следствия 1 к теореме Лагранжа, $g(x) \neq 0$ для всех $x \in \dot{U}(a)$.

Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно условию 3), существует такое число $\delta > 0$, что

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - l \right| < \varepsilon \text{ для всех } t \in \dot{U}_\delta(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta). \quad (3)$$

и можно считать, что проколотая δ -окрестность $\dot{U}_\delta(a)$ точки a содержится в $\dot{U}(a)$.

Фиксируем произвольное $x \in \dot{U}_\delta(a), x > a$; т.е., $x \in (a, a+\delta), a < x < a+\delta$. Поскольку отрезок $[a, x]$ лежит в интервале $U(a)$, то по теореме Коши о среднем значении, согласно которой

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \text{ для некоторого } t, a < t < x < a+\delta. \quad (4)$$

Подставив формулу (4) в левую часть формулы (3), получим, что $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon$ для всех $x \in (a, a+\delta)$; т.е., что $l = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Формула (4) справедлива и в случае $x \in (a-\delta, a), a-\delta < x < a$, с некоторым $t, a-\delta < x < t < a$, и следовательно, $l = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Окончательно, $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. $\triangleright$

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ (неопределенность $\frac{0}{0}$).

Отображение производных последовательно упрощается

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 + \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x}$$

и при $x \rightarrow 0$ оно, очевидно, стремится к 2. Согласно теореме, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2$. $\triangleright$

Замечание 1. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же предположениям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя-Бернулли можно применять повторно (т.е. перед отношением первых производных функций $f'(x)$ и $g'(x)$ можно заменить пределом отношение высших производных этих функций). В следующем примере правило применяется последовательно три раза: после первого мы сократили на $e^x \neq 0$, а после второго — отбрасываем множитель e^x в знаменателе (что он стремится к 1); эти выкладки упрощаются.

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} + x e^x - 2 e^{2x} + 2 e^x}{(e^x - 1)^3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^{2x} + e^{2x} + x e^x + e^x - 4 e^{2x} + 2 e^x}{3(e^x - 1)^2 e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x - 3 e^x + x + 3}{3(e^x - 1)^2} =$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x + 2 e^x - 3 e^x + 1}{2(e^x - 1) e^x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x + 2 e^x - e^x}{e^x} = \frac{1}{6} \cdot \triangleright$$

Замечание 2. Аналогичная теорема справедлива при раскрытии неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^p x$, где $p > 0$ — произвольное и фиксированное, применив правило Лопиталя-Бернулли n -кратно с $n = [p] + 1$, $0 < p < n$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^p x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln^p x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{p \ln^{p-1} x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = (-p) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^{p-1} x =$$
$$= (-p) [- (p-1)] \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^{p-2} x = \dots = (-p) [- (p-1)] \dots [- (p-n+1)] \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^{p-n} x =$$
$$= (-1)^n p(p-1) \dots (p-n+1) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^{p-n} x = 0. \quad \triangleright$$

Утверждение. Для любого $p > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$.

Утверждение достаточно доказать в случае натуральных p , ибо для любых $p > 0$ и $x \geq 1$ имеем $0 < \frac{x^p}{e^x} \leq \frac{x^n}{e^x}$, где $n = [p] + 1$, $n > p$. Положим $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = t$, $x = -\ln t$, так что $t \rightarrow 0+$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(-1)^p \ln^p t}{\frac{1}{t}} = (-1)^p \lim_{t \rightarrow 0+} t \ln^p t = 0. \quad \triangleright$$

Утверждение. Для любого $\varepsilon > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$.

Положим $x^\varepsilon = e^t$, $t = \varepsilon \ln x$, так что $t \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{e^t} = 0. \quad \triangleright$$

§4. Монотонные дифференцируемые функции.

Теорема Лагранжа о среднем значении играет фундаментальную роль во многих разделах математики и математического анализа. В этом параграфе мы применим её для изучения свойства монотонности дифференцируемых функций на промежутках.

4.1. Критерий постоянства непрерывной функции на промежутке.

Теорема. Непрерывная на промежутке $\langle a, b \rangle$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, функция f постоянна на нём тогда и только тогда, когда её производная f' равна нулю во всех точках интервала (a, b) ; т.е., $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$.

△ Необходимость. Если f постоянна на $\langle a, b \rangle$, то, в частности, $f(x) = c$ для всех $x \in (a, b)$, и поэтому, $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$.

△ Достаточность. По условию, функция f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$. Рассмотрим произвольные точки $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ и пусть, для определённости, $x_1 < x_2$. Тогда отрезок $[x_1, x_2]$ принадлежит промежутку $\langle a, b \rangle$, а интервал (x_1, x_2) — интервалу (a, b) . Таким образом, функция f непрерывна на $[x_1, x_2]$, её производная $f'(x) = 0$ для всех $x \in (x_1, x_2)$, и по теореме Лагранжа о среднем значении, $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$, поскольку $\xi \in (x_1, x_2)$. Итак, $f(x_2) = f(x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$; т.е., f постоянна на $\langle a, b \rangle$. ▸

4.2. Критерий монотонности функции на промежутке.

Теорема. Если функция f непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, и дифференцируема в интервале (a, b) , то она возрастает (убывает) на промежутке $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех $x \in (a, b)$.

△ Достаточность. По условию, функция f непрерывна на $\langle a, b \rangle$, дифференцируема в (a, b) и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех $x \in (a, b)$. Рассмотрим произвольные точки $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $x_1 \leq x_2$. Как и в доказательстве теоремы предыдущего пункта, убеждаемся, что на отрезке $[x_1, x_2]$ функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа о среднем значении, согласно которой $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$. Так как $x_2 - x_1 \geq 0$, то знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ совпадает со знаком числа $f'(\xi)$, который, в свою очередь, совпадает со знаком производной функции f' на (a, b) . Поэтому, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ и f возрастает на $\langle a, b \rangle$, если $f'(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$, и $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ и f убывает на $\langle a, b \rangle$, если $f'(x) \leq 0$, $x \in (a, b)$. ▸

Необходимость. По условию, функция f непрерывна на $\langle a, b \rangle$, дифференцируема в (a, b) и пусть, для определенности, возрастает на $\langle a, b \rangle$. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Тогда $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ для всех $x \in \langle a, b \rangle$, $x \neq x_0$, поскольку знак числителя совпадает со знаком знаменателя. Поэтому, так как существует $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то $f'(x_0) \geq 0$ в произвольной точке $x_0 \in (a, b)$.

Аналогично, если функция f убывает на $\langle a, b \rangle$, то $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ для всех $x \in \langle a, b \rangle$, $x \neq x_0$, и поэтому, $f'(x_0) \leq 0$ для любой точки $x_0 \in (a, b)$. $\triangleright$

4.3. Достаточный признак строгой монотонности функции на промежутке.

Теорема. Если функция f непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, дифференцируема в интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a, b)$, то f строго возрастает (строго убывает) на $\langle a, b \rangle$.

$\triangleleft$ Как и в доказательстве достаточности условие в теореме предыдущего пункта, убеждаемся, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ для любых точек $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $x_1 < x_2$, где $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, откуда $f(x_2) - f(x_1) > 0$, если $f'(x) > 0$ на (a, b) , и $f(x_2) - f(x_1) < 0$, если $f'(x) < 0$ на (a, b) . $\triangleright$

Замечание. Предложенное условие не является необходимым условием строгой монотонности дифференцируемой функции. Функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, но ее производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в нуль в точке $x_0 = 0$.

§ 5. Исследование экстремумов непрерывных функций.

5.1. Достаточное условие экстремума функции по знаку ее первой производной.

Теорема. Если функция f непрерывна в окрестности $U(x_0) = (\alpha, \beta)$ точки x_0 , дифференцируема в ее проколотой окрестности $\dot{U}(x_0) = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, производная $f' \neq 0$ в $\dot{U}(x_0)$ и сохраняет в интервалах (α, x_0) и (x_0, β) постоянные знаки, то f имеет в x_0 экстремум, когда эти знаки противоположны, и f не имеет в x_0 экстремума, когда знаки одинаковы. Более того, если $f'(x) > 0$ в интервале (α, x_0) и $f'(x) < 0$ в интервале (x_0, β) , то x_0 — точка строгого максимума функции f ; если $f'(x) < 0$ в интервале (α, x_0) и $f'(x) > 0$ в интервале (x_0, β) , то x_0 — точка строгого минимума функции f .

$\triangleleft$ Пусть $f'(x) > 0$ для $x \in (\alpha, x_0)$ и $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0, \beta)$. Тогда, по условию функция f непрерывна на промежутках $(\alpha, x_0]$ и $[x_0, \beta)$, то по теореме пункта 4.3 предыдущего § 4, функция f строго возрастает на промежутке $(\alpha, x_0]$ и строго убывает на промежутке $[x_0, \beta)$, так что $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (\alpha, x_0)$, а также

и $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, \beta)$, $x_0 < x < \beta$. Таким образом, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$, и x_0 - точка строгого максимума функции f .

Пусть теперь $f'(x) < 0$ для $x \in (\alpha, x_0)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0, \beta)$. Как и выше, убеждаемся, что f строго убывает на $(\alpha, x_0]$ и строго возрастает на $[x_0, \beta)$, так что $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in (\alpha, x_0)$, $\alpha < x < x_0$, и $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, \beta)$, $x_0 < x < \beta$. Таким образом, $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$, и x_0 - точка строгого минимума функции f .

Наконец, если $f'(x) > 0$ для всех $x \in \dot{U}(x_0)$, то f строго возрастает на обеих промежуточных $(\alpha, x_0]$ и $[x_0, \beta)$, так что $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (\alpha, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, \beta)$ и, по определению, x_0 не является точкой локального экстремума функции f . Аналогичное заключение получим и в случае, когда $f'(x) < 0$ для всех $x \in \dot{U}(x_0)$. $\triangleright$

5.2. Достаточное условие экстремума по знаку второй производной.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет $f'(x_0) = 0$ и вторую производную $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 - точка экстремума функции f . Более того, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка строгого минимума функции f , а если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка строгого максимума функции f .

$\triangleleft$ Условие существования $f''(x_0)$, по определению, влечёт утверждение о существовании у функции f производной функции f' в некоторой окрестности точки x_0 (и следовательно, также непрерывность функции f' в этой окрестности) и, кроме того, существование предела $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, или, с учётом $f'(x_0) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = f''(x_0). \quad (1)$$

Так как $f''(x_0) \neq 0$, то из (1) и теоремы о сохранении знака предела функции в точке следует, что в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0) = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ точки x_0 отношение $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ сохраняет постоянный знак (знак числа $f''(x_0)$). Следовательно, так как знаменатель $x - x_0$ меняет знак при переходе через точку x_0 , то числитель $f'(x)$ обязан иметь знаковые противоположные знаки в интервалах (α, x_0) и (x_0, β) . Теперь остаётся применить теорему из предыдущего пункта. $\triangleright$

Замечание. Условие $f''(x_0) = 0$ не гарантирует (но и не отрицает) наличия у функции f экстремума в точке x_0 . Например, вторая производная $f''(x) = 6x$ функции $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке $x_0 = 0$ и функция не имеет в x_0 экстремума, в то время, как вторая производная $f''(x) = 12x^2$ функции $f(x) = x^4$ также равна нулю в точке $x_0 = 0$, но функция имеет в $x_0 = 0$ строгий минимум.

5.3. Алгоритм определения точек экстремума непрерывной функции

Надеемся, что исследование точек экстремума функции, упомянутое в этом и в предыдущем параграфах в виде ниже-следующей схемы.

Пусть область определения D_f функции f содержит промежуток $\langle a, b \rangle$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, в котором f непрерывна. Тогда надо убедиться точками экстремума функции f в интервале (a, b) могут быть либо точки, в которых не существует ни бесконечно производная f' , либо те ее точки, в которых f' обращается в нуль (в силу теоремы Ферма); последние иногда называют стационарными точками функции f . Рассмотрим "подозреваемые" точки $x_k, k=1, 2, \dots, n$, в порядке их возрастания $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < b$ так что интервалы $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b)$ взаимно не пересекаются и в них производная функция f' сохраняет постоянные знаки. Заключение о наличии в точке $x_k, 1 \leq k \leq n$, экстремума функции f по знакам её производной f' в промежуточной окрестности точки x_k проводится по схеме:

	Знак производной		Заключение
	$x < x_k$	$x > x_k$	
I	+	+	Экстремума нет
II	+	-	max
III	-	+	min
IV	-	-	Экстремума нет

5.4. В заключение рассмотрим такую задачу. Пусть точка движется из P в Q (рис. 1) так, что в нижней полуплоскости её скорость постоянна и равна v_1 , а в верхней равна v_2 . Сформулируйте: какие должны быть пути точки, чтобы на весь путь затратить минимум времени.

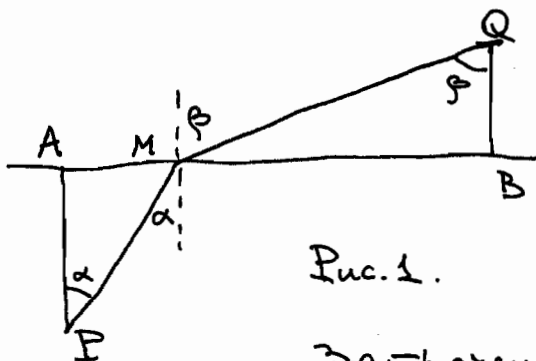


Рис. 1.

Если $v_1 = v_2$, то ясно, что искомого пути есть прямая PQ . Если же $v_1 \neq v_2$, то это ломанная PMQ , и положение M надо определить так, чтобы на весь путь PMQ было затрачено минимальное время.

Пусть $AB = l$, $QB \perp AB$ и $QB = b$, $PA \perp AB$ и $PA = a$, $AM = x$ (рис. 1). Тогда время, затраченное на путь PMQ ,

$$t = \frac{PM}{v_1} + \frac{QM}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2}$$

легко убедиться, что надо найти минимум этой функции

В точке минимума (необходимый признак экстремума) ^{должно быть} ~~должно быть~~ (5)

$$t'_x = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 0,$$

откуда
$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} : \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Из первого видно, что

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{AM}{EM} = \sin \alpha, \quad \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \frac{MB}{MQ} = \sin \beta,$$

так что в точке минимума должно быть

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Последнее, как легко видеть, то же условие, что и для преломления света при переходе из одной среды в другую (на рис. пунктир $\perp$ в точке M перпендикулярен AB и α — угол падения, а β — угол преломления). Таким образом, мы приходим также и к следующему выводу (принципу Ферма): свет движется по такому пути, чтобы время движения было минимальным.

§6. Выпуклость. Точки перегиба.

В этом параграфе рассмотрим вопросы более детального исследования функций, которые связаны с поведением второй производной.

§6.1. Терминология.

Определение 1. Если на интервале $I=(a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, график функции f расположен выше любой своей касательной, то функция f и её график называются выпуклыми вниз ^{на I} (рис. 1).

Определение 2. Если на интервале $I=(a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, график функции f расположен ниже любой своей касательной, то функция f и её график называются выпуклыми вверх ^{на I} (рис. 2).

Определение 3. Точка $t \in (a,b)$ называется точкой перегиба функции f и её графика, если график функции f имеет касательную в точке $(t, f(t))$, а на интервалах (a,t) и (t,b) функции f выпуклые, но на одном — вверх, а на другом — вниз (или наоборот). (рис. 3).

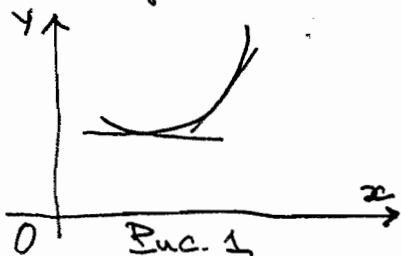


Рис. 1

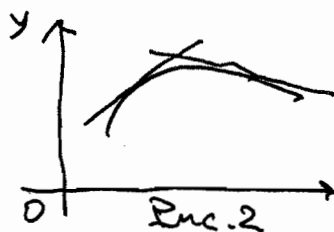


Рис. 2

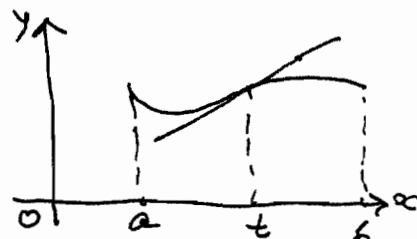


Рис. 3

§6.2. Достаточный признак выпуклости.

Теорема. Если $f'' > 0$ на интервале I , то функция f выпукла вниз на I ; если $f'' < 0$ на интервале I , то функция f выпукла вверх на I .

Возьмём любую точку t из интервала I и запишем уравнение касательной к графику функции f в его точке $(t, f(t))$:

$$y = f(t) + f'(t)(x - t).$$

Рассмотрим разность $z(x)$ ординат точек на касательной и на графике функции f при одном и том же $x \in I$ (рис. 4):

$$z(x) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t). \quad (1)$$

По теореме Лагранжа, $f(x) - f(t) = f'(c_1)(x - t)$, где c_1 между t и x

~~и~~ и ординаты можно пользоваться, так как на данном интервале I существует производная f' (и даже f''). Тогда формула (1) примет вид

$$z(x) = f'(c_1)(x - t) - f'(t)(x - t) =$$

$$= [f'(c_1) - f'(t)](x - t). \quad (2)$$

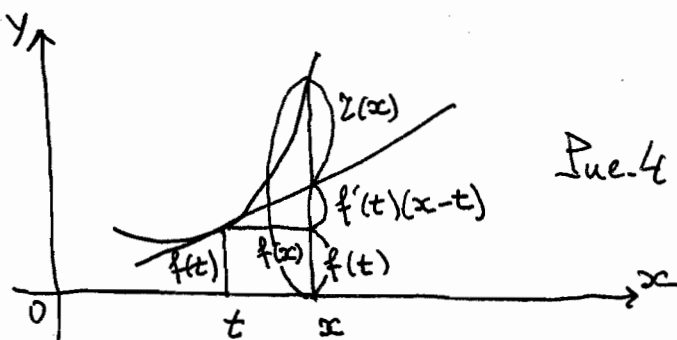


Рис. 4

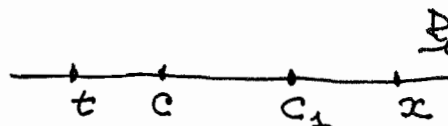


Рис. 5

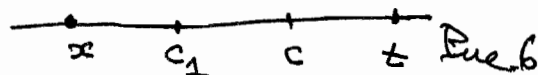


Рис. 6

Опишем по теореме Лагранжа, $f'(c_1) - f'(t) = f''(c)(c_1 - t)$, где c между t и c_1 и формулой можно пользоваться, так как на большем интервале I у функции f' есть производная $(f')' = f''$. Поэтому формулы (1) и (2) принимают окончательный вид:

$$\tau(x) = f''(c)(c_1 - t)(x - t). \quad (3)$$

Поскольку $(c_1 - t)(x - t) > 0$ и при $x > t$, и при $x < t$ (см. рис. 5 и 6), то, согласно (3), знак $\tau(x)$ совпадает со знаком $f''(c)$. Если $f'' > 0$ на I , то $\tau > 0$ ~~на I~~ ; т.е. график f расположен выше касательной (рис. 4), а так как это произвольная касательная, то функция f выпукла вниз на I . Если $f'' < 0$ на I , то $\tau < 0$ и график f расположен ниже касательной, а так как это произвольно взятая касательная, то функция f выпукла вверх на I . $\triangleright$

§ 3. Свойство выпуклых функций.

Теорема. Если функция f выпукла вниз на интервале I , то любая дуга графика f лежит под своей хордой. Если функция f выпукла вверх на интервале I , то любая дуга графика f лежит над своей хордой.

Пусть функция f выпукла вниз на интервале I ; A и B — любые точки на графике f (рис. 7). Берём на дуге AB любую точку M и проводим касательную MT к графику f (M — точка касания). Так как функция f выпукла вниз то её график расположен выше прямой MT . В частности, точки A и B также расположены над MT , и поэтому отрезок AB тоже расположен над MT , а в частности, — и над точкой M . Таким образом, точка M лежит под хордой AB . Но M — любая точка дуги AB . Следовательно, дуга AB лежит под хордой AB .

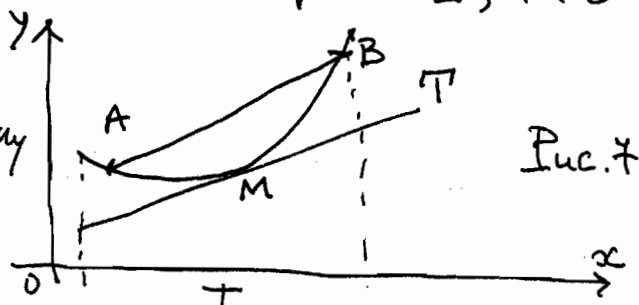


Рис. 7

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. $\triangleright$

Замечание. На самом деле утверждение этой теоремы считается определением свойства выпуклости для произвольной функции и требуется только доказать его равносильность определениям 1 и 2 в случае дифференцируемых функций. Я не располагаю лекционными материалами для обоснования такого взгляда на свойства выпуклости функции, хотя излагаю его в своих более обзёмных курсах математического анализа несколько десятилетий. Он представлен также в учебнике V.I. Gavrilov, Z. Pavlovic. Математика Аналіз I — Подгорца, "Unizex", РМФ-1994, 531 с.р. и в статье В.М. Гаврилов, А.В. Судьбинин. Изложение темы "Выпуклые функции" в университетском курсе математического анализа // Математика в высшем образовании, № 1 (2003), с. 21-28.

6.4. Примеры.

Пример 1. Построим график функции $y = e^{-x^2}$

Это непрерывная чётная функция, определённая всюду на $\mathbb{R}$ и всюду больше нуля, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$. Находим,

$y' = -2xe^{-x^2}$; $y' > 0$ на $(-\infty, 0)$ — функции строго возрастает на $(-\infty, 0)$; $y' < 0$ на $(0, +\infty)$ — функции строго убывает на $(0, +\infty)$; в нуле

y' меняет знак с плюса на минус; и.е., 0 — точка максимума и $y(0) = 1$

Далее, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$; $y'' < 0$ на $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ — здесь функция выпукла вверх; $y'' > 0$ на $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ — здесь функция выпукла вниз; $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ — точки перегиба, в них $y = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6$ и

$y'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,8$, $y'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 0,8$ (рис. 8).

Функция $y = e^{-x^2}$ играет фундаментальную роль в теории вероятностей.

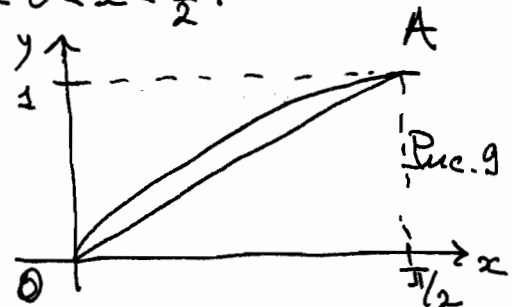
Пример 2. Докажем, что $\ln x \leq x - 1$ при $x \geq 0$.

Функция $y = \ln x$ выпукла вверх на $(0, +\infty)$, так как $y'' = -\frac{1}{x^2}$. Построим её график, расположенный под касательной, проведённой в точке $x_0 = 1$, — её уравнение $y = x - 1$.

Пример 3. Докажем, что $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Функция $y = \sin x$ выпукла вверх на $(0, \pi)$, так как $y'' = -\sin x < 0$ на $(0, \pi)$. Построим дугу OA синусоиды (рис. 9) расположена над хордой OA . Уравнение этой хорды

$y = \frac{2x}{\pi}$.



6.5. Неравенство Чебышева.

Доказываемое ниже утверждение является прямым обобщением утверждения 6.3.

Теорема. Пусть дифференцируемая функция f выпукла вниз (вверх) на интервале (a, b) . Тогда, для любых точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ из интервала (a, b) и любых неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, y которых $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, выполняется неравенство.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \quad (4)$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)\right) \leq f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right). \quad (4')$$

Обозначим $x_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ и покажем, что $x_0 \in (a, b)$. Так как $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, то хотя бы одно $\alpha_k > 0$. По условию, $a < x_k < b$, $1 \leq k \leq n$.

и т.д., а $\alpha_k \leq \alpha_k x_k \leq b \alpha_k, 1 \leq k \leq n$, и тогда обе для одного индекса k неравенства суммируем, так что $\sum_{k=1}^n \alpha_k a < \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k < \sum_{k=1}^n \alpha_k b$. Поскольку $\sum_{k=1}^n \alpha_k = a$ и $\sum_{k=1}^n \alpha_k = b$, то заключаем, что $a < x_0 < b$; т.е., что $x_0 \in (a, b)$. Заметим также, что $\sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - x_0) = 0$.

Пусть теперь f выпукла вниз на (a, b) . Согласно определению 1, примененному к функции f в точке x_0 , неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

справедливо для всех $x \in (a, b)$, и, в частности,

$$f(x_k) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_k - x_0), 1 \leq k \leq n. \quad (5)$$

Умножив обе части каждого неравенства в (5) на числа $\alpha_k \geq 0, 1 \leq k \leq n$, соответственно, и сложив их почленно, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) \geq f(x_0) \sum_{k=1}^n \alpha_k + f'(x_0) \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - x_0) = f(x_0),$$

совпадающее с (4).

Аналогично (с изменением знаков всех неравенств в (5) и hence на противоположные) устанавливается справедливость неравенства (4') для выпуклой вверх функции f . $\triangleright$

6.6. Неравенство Гёльдера.

Пусть $s > 0$ — действительное число, удовлетворяющее условию $0 < s < 1$. Функция $f(x) = x^s, x \geq 0$, имеет $f''(x) = s(s-1)x^{s-2} < 0$ для всех $x > 0$, и следовательно, $f(x) = x^s$ выпукла вверх на интервале $(0, +\infty)$. Рассмотрим произвольное $n \in \mathbb{N}$, пусть $x_i = \frac{\xi_i}{\eta_i}, \xi_i > 0, \eta_i > 0, 1 \leq i \leq n$, и числа $\alpha_i = \frac{\eta_i}{\sum_{k=1}^n \eta_k}, 1 \leq i \leq n$, так что $\alpha_i > 0, 1 \leq i \leq n$, и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Согласно неравенству Йенсена (4'), примененному к функции $f(x) = x^s$ в точках $x_i, 1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i}{\eta_i} \right)^s \frac{\eta_i}{\sum_{k=1}^n \eta_k} \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \frac{\eta_i}{\sum_{k=1}^n \eta_k} \right)^s$$

или

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^s \cdot \eta_i^{1-s} \leq \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)^s \left(\sum_{k=1}^n \eta_k \right)^{1-s}. \quad (6)$$

Далее, положим $s = \frac{1}{p}, 1-s = \frac{1}{q}$, так что $p > 1, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а также $\xi_i^s = u_i, \eta_i^{1-s} = v_i, 1 \leq i \leq n$, так что $\xi_i = u_i^{1/s} = u_i^p, \eta_i = v_i^{1/(1-s)} = v_i^q, 1 \leq i \leq n$. Неравенство (6) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n v_i^q \right)^{1/q} \quad (7)$$

Неравенство Гёльдера, справедливое для всех $u_i > 0, v_i > 0, 1 \leq i \leq n$, и $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Неравенство (7) в случае $p=q=2$ можно записать в виде

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (8)$$

Неравенство Коши — Буняковского, справедливое уже для произвольных чисел $u_i, v_i, 1 \leq i \leq n$.

6.7. Неравенство Мinkовского.

(5)

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x^{1/z})^{1/z}$, $x \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$ - фиксировано. Из выражения для $f''(x)$, $f''(x) = -\frac{z-1}{z} \frac{(1+x^{1/z})^{z-2}}{x^{2-1/z}}$, $x > 0$,

заключаем, что $f''(x) < 0$ для всех $x \geq 0$ и $z > 1$, так что функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале $(0, +\infty)$ для любого $z > 1$. Записывая неравенство Йенсена для $\xi_i, \eta_i, \alpha_i, 1 \leq i \leq n$, таких же как в предыдущем пункте, имеем

$$\sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\sum_{k=1}^n \eta_k} \left(1 + \frac{\xi_i^{1/z}}{\eta_i^{1/z}}\right)^z \leq \left[1 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \frac{\eta_i}{\sum_{k=1}^n \eta_k}\right)^{1/z}\right]^z =$$

$$= \left[1 + \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^n \eta_k}\right)^{1/z}\right]^z,$$

или, после несложных преобразований,

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^{1/z} + \eta_i^{1/z})^z \leq \left[\left(\sum_{k=1}^n \eta_k\right)^{1/z} + \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^{1/z}\right]^z. \quad (9)$$

Переходя к новым переменным $u_i = \xi_i^{1/z}$, $v_i = \eta_i^{1/z}$, $1 \leq i \leq n$, преобразуем (9) к виду

$$\left[\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^z\right]^{1/z} \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^z\right)^{1/z} + \left(\sum_{i=1}^n v_i^z\right)^{1/z}, \quad (10)$$

неравенство Мinkовского, справедливое для произвольных $u_i \geq 0, v_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, и $z \geq 1$.

§7. Дифференцируемость функций, заданных параметрически.

7.1. Функции, заданные параметрически.

Рассмотрим числовые функции φ и ψ , определенные на некотором промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$; и.е., $D\varphi = D\psi = \langle \alpha, \beta \rangle$. Параметрические уравнения

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \quad (1)$$

задают множество $\{(\varphi(t), \psi(t)) | t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$ упорядоченных пар чисел; и.е., соответствие. Изучим, когда это соответствие однозначное; и.е., биективное. Рассмотрим только случай, когда φ - строго монотонная и непрерывная функция. Тогда известно, что множество $R_\varphi = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ будет некоторым промежутком $\langle a, b \rangle$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, и на $\langle a, b \rangle$ определена обратная функция $\varphi^{-1} = f$, $D_f = \langle a, b \rangle = R_\varphi$, строго монотонная и непрерывная, и что $R_f = R_{\varphi^{-1}} = \varphi^{-1}(\langle a, b \rangle) = \langle \alpha, \beta \rangle$.

Теорема 1. Если функция φ строго монотонная и непрерывная на $\langle \alpha, \beta \rangle$, то множество $\{(\varphi(t), \psi(t)) | t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$ есть график функции; и.е., на промежутке $\langle a, b \rangle = R_\varphi = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ существует такая функция $f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, что

$$\psi(t) = f(\varphi(t)) \text{ для всех } t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (2)$$

Если при этом функция ψ непрерывна на $\langle \alpha, \beta \rangle$, то f также непрерывна на $\langle a, b \rangle$.

На $\langle a, b \rangle = R_\varphi$ рассмотрим функцию $\varphi^{-1} = f$, $D_f = \langle a, b \rangle$, и положим $f = \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f$. Так как $R_f = \langle \alpha, \beta \rangle = D_\varphi = D\varphi$, то $D_f = D_\varphi = \langle a, b \rangle$. Далее, так как $f \circ \varphi = I_{D_\varphi} = I_{D_f}$, то $\varphi = \varphi \circ I_{D_f} = \varphi \circ (f \circ \varphi) = (\varphi \circ f) \circ \varphi = f \circ \varphi$, и следовательно, справедлива формула (2).

Кроме того, если φ - непрерывная функция, то, с учетом непрерывности функции f на $\langle a, b \rangle$, заключаем, что непрерывна также функция $f = \varphi \circ \varphi^{-1}$ (как композиция непрерывных функций).
Функцию f , определенную теоремой 1, называют функцией, заданной параметрически уравнением (1).

7.2. Дифференцируемость функций, заданных параметрически
Предположим, что функции f задана параметрическим уравнением (1), в котором функции φ и ψ непрерывны на невырожденном промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, φ строго ~~монотонно~~ ^{монотонно} на $\langle \alpha, \beta \rangle$ и $\langle a, b \rangle = R_\varphi = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$.

Теорема 2. Если функции φ, ψ дифференцируемы в точке $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то функция f дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$, и $f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$.

Согласно теореме 1, $f = \varphi \circ \varphi^{-1}$, $D_f = \langle a, b \rangle = R_\varphi = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$. Из условий доказываемой теоремы следует, что φ удовлетворяет теореме о дифференцируемости обратной функции, так как обратная функция φ^{-1} дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0) \in \langle a, b \rangle$ и $(\varphi^{-1})'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(t_0)}$. Таким образом, композиция $f = \varphi \circ \varphi^{-1}$ дифференцируемых функций φ и φ^{-1} сама дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = \varphi'(t_0) \cdot (\varphi^{-1})'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$. $\triangleright$

7.3. Вторая производная функции, заданной параметрически.
Если условия теоремы 2 выполнены в каждой точке $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ и на $\langle a, b \rangle$ определена производная функции f' , задаваемая параметрическим уравнением

$$x = \varphi(t), \quad y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (3)$$

Теперь, если в точке $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ существуют вторые производные $\varphi''(t)$ и $\psi''(t)$, то в точке $x \in \langle a, b \rangle$, $x = \varphi(t)$, где производная функции f' выписана, условия теоремы 2 и в точке x она имеет производную $(f')'(x) = f''(x)$, которая на основании представления (3) вычисляется по формуле $f''(x) = \frac{(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$.

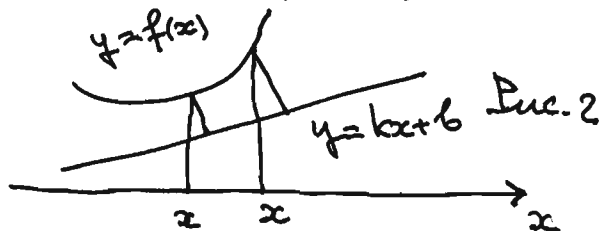
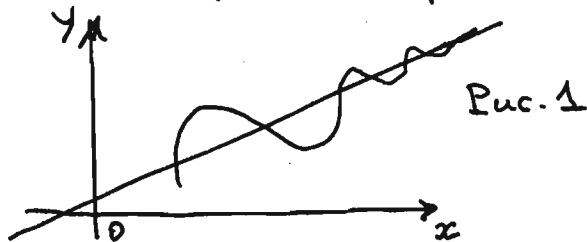
Аналогичным образом вычисляются последующие производные функции f , заданной параметрическим уравнением (1).

§8. Исследование функций и построение графиков.

8.1. Асимптоты.

Символом ω обозначим как $+\infty$, так и $-\infty$, так что под окрестностью "точки" ω подразумеваем произвольный интервал $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, если $\omega = +\infty$, или произвольный интервал $(-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$, если $\omega = -\infty$.

Пусть функция f определена в окрестности "точки" ω . Прямую $y = kx + b$ называем (наклонной) асимптотой графика этой функции при $x \rightarrow \omega$, если расстояние ρ от точки $M(x, f(x))$ графика до этой прямой стремится к нулю при $x \rightarrow \omega$ (рис. 1)



Расстояние ρ от точки $M(x, f(x))$ графика функции f от прямой $y = kx + b$ пропорционально $f(x) - y$ (рис. 2). Поэтому прямая $y = kx + b$ есть асимптота графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow \omega$ тогда и только тогда, когда f определена в окрестности "точки" ω и
$$\lim_{x \rightarrow \omega} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Теорема 1. Прямая $y = kx + b$ есть асимптота графика функции f , определенной в окрестности "точки" ω , тогда и только тогда, когда

$$k = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \rightarrow \omega} (f(x) - kx). \quad (1)$$

Если прямая $y = kx + b$ - асимптота, то $[f(x) - (kx + b)] \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \omega$, так что $(f(x) - kx - b) \rightarrow 0$ и тем более $(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \omega$, откуда $\frac{f(x)}{x} \rightarrow k$ при $x \rightarrow \omega$. Обратно, если пределы (1) существуют, то $y = kx + b$ - асимптота, уже потому, что $[f(x) - (kx + b)] \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \omega$. $\triangleright$

Теорема 2. Если функция f определена и дифференцируема в окрестности "точки" ω и $\lim$ существуют

$$\lim_{x \rightarrow \omega} f'(x) = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \omega} (f(x) - x f'(x)) = b,$$

то прямая $y = kx + b$ есть асимптота графика функции f при $x \rightarrow \omega$.

Согласно правилу Лопиталя - Бернулли

$$k = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \omega} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{\frac{f(x)}{x} - k}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{[f'(x) \cdot x - f(x)] \cdot \frac{1}{x^2}}{-1/x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \omega} [f(x) - x f'(x)] = b, \end{aligned}$$

откуда, по теореме 1, и следует утверждение теоремы 2. $\triangleright$

Замечание. Если функция f определена в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ и $f \rightarrow \pm \infty$ при $x \rightarrow a+0$ или при $x \rightarrow a-0$, то прямая $x=a$ будет вертикальной асимптотой для графика функции f , поскольку в этих случаях расстояние d от точки $M(x, f(x))$ графика до прямой $x=a$ равно $|x-a|$ и $d=|x-a| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a+0$ и при $x \rightarrow a-0$.

7.2. Схема исследования функции для построения её графика.

Ниже предлагается схема аналитического исследования функции для построения её графика:

- 1°. Внесение области определения функции.
- 2°. Вопрос о чётности и нечётности функции; вопрос о её периодичности.
- 3°. Нахождение точек пересечения графика с осями координат.
- 4°. Определение точек разрыва функции. Нахождение предельных значений в точках разрыва слева и справа; вертикальные асимптоты.
- 5°. Исследование функции на экстремум и нахождение экстремальных значений.
- 6°. Определение точек перегиба и интервалов выпуклости функции.
- 7°. Отыскание асимптот графика на $-\infty$ и $+\infty$; определение точек пересечения графика с асимптотами.

§9. Дифференциал.

9.1. Элементарные дифференциалы числовой функции.

Определение 1. Если числовая функция f дифференцируема в точке x , то её дифференциалом $df(x)$ в этой точке называют одну и ту же линейную функцию $f'(x) \cdot h$ (нового) независимого переменного h .

Таким образом, $df(x)$ при данном x есть функция аргумента h , определённая формулой

$$df(x)(h) = f'(x)h; h \in \mathbb{R} \quad (1)$$

областью определения дифференциала $df(x)$ является всё множество $\mathbb{R}$.

Хотя аргумент h может принимать любые значения из $\mathbb{R}$, однако по традиции часто рассматриваются лишь случаи $df(x)$ на множестве тех h , для которых $x+h \in D_f$; т.е., лишь на множестве приращений аргумента x функции f . Это объясняется тем, что дифференциал тесно связан с приращением функции. Так как, по определению, f дифференцируема в x , то

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, и первое слагаемое в правой части — дифференциал, но рассматриваемый только для значений $h = \Delta x$. Если $f'(x) \neq 0$, то второе слагаемое — $\alpha(\Delta x)\Delta x$ — бесконечно мало по сравнению с $f'(x)\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

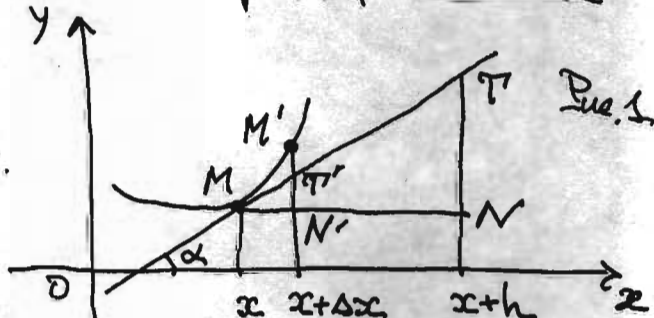
$$\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x} = \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)} \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \quad (2)$$

Это можно повернуть, что дифференциал есть главная, линейная часть приращения функции.

9.2. Геометрический и механический смысл дифференциала.

Пусть функция f дифференцируема в точке x . Как известно, её график имеет в точке $M(x, f(x))$ касательную.

Утверждение. Значение $f'(x)h$ дифференциала равно приращению ординаты этой касательной при переходе от x к $x+h$ (рис. 1).



Действительно, $\tan \alpha = f'(x)$, $MN = h$, поэтому $N'T' = MN \cdot \tan \alpha = f'(x)h$. Из рисунка также видно, что $f'(x)\Delta x = N'T'$ есть часть приращения $f(x+\Delta x) - f(x) = N'T'$ функции, сходящаяся к совпадению с ним при $\Delta x \rightarrow 0$ (в смысле утверждения (2)). ▽

Дифференциал допускает и механическое истолкование. Если x - время, а $f(x)$ - путь, пройденный автомобилем до функции x до момента x , то $f'(x)$ - скорость в момент x . Но тогда $f'(x)h$ - путь, который прошла бы точка за промежуток времени от x до $x+h$, если бы с момента x её скорость оставалась неизменной (т.е., приложенные силы уравновесились).

9.3. Инвариантная форма дифференциала.

Положив в формуле (1) $f(x)=x$, получим

$$dx(h) = 1 \cdot h = h, \quad h \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

так что dx (где под x понимается функция $f(x)=x$) в каждой точке x есть тождественное отображение:

Подставляя (3) в правую часть формулы (1), получим

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h) \text{ для всех } h \in \mathbb{R}, \text{ или} \\ df(x) = f'(x)dx \quad (4)$$

как равенство двух однородных линейных функций.

Теорема. Равенство (4) сохраняется ("инвариантно") при подстановке в обе части вместо x производной функции $\varphi(t)$, дифференцируемой в данной точке t .

Действительно, по формуле (1) и теореме о производной сложной функции

$$df(\varphi(t))(h) = (f(\varphi(t)))' \cdot h = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot h = f'(\varphi(t)) d\varphi(t)(h)$$

и так как это верно для всех $h \in \mathbb{R}$, то

$$df(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))d\varphi(t). \quad (4')$$

▷

Ввиду особой важности доказанной теоремы, подчеркнем ещё раз, что формула (4) имеет место как в случае, когда x независимая переменная, так и в случае, когда x - функция (в виде формулы (4')).

9.4. Дифференциал суммы, произведения и частного.

В силу равенства (4) из любой формулы для производной в точке x при умножении на dx получается соответствующая формула для дифференциала. В частности, в точках, где функции u и v удовлетворяют условиям теоремы о дифференцировании суммы, произведения или частного, так что $(u+v)' = u' + v'$, $(uv)' = uv' + vu'$, $(\frac{u}{v})' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$, получим $d(u+v) = (u' + v')dx$ и откуда $d(u+v) = du + dv$; аналогично $d(uv) = u dv + v du$, $d(\frac{u}{v}) = \frac{v du - u dv}{v^2}$.

Отметим, что если c - постоянная, то $dc = 0$, $d(cu) = c du$.

Укажем на ещё одно важное следственное формулы (4). В соответствии с общепринятой внешне традицией, дифференциал dx функции $f(x)=x$ называют также дифференциалом независимого переменного (аргумента) x и считают $dx \neq 0$ ($dx=0$, если C - постоянная).

Если обе части формулы (4) на dx , получим

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{dx},$$

т.е., первая производная функции равна отношению приращения дифференциала этой функции на дифференциал её аргумента.

§ 5. Дифференциалы высших порядков.

Начнём с терминологии.

Определение 2. Числовую функцию f называют однородной функцией m -ой степени ($m \in \mathbb{N}$), если $f(tx) = t^m f(x)$ для всех $x \in D_f$ и любого $t \in \mathbb{R}$.

Примеры: 1) линейная функция $f(x) = kx + b$ будет однородной функцией первой степени, тогда и только тогда, когда $k \neq 0$ и $b=0$; 2) квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ будет однородной функцией второй степени тогда и только тогда, когда $a \neq 0$ и $b=c=0$; 3) многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ степени $n \in \mathbb{N}$ будет однородной функцией n -ой степени тогда и только тогда, когда $a_n \neq 0$ и $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_1 = a_0 = 0$.

Однородную линейную функцию называют линейной формой. Таким образом, если функция f дифференцируема в точке x , то дифференциалом f в x называют линейную форму $f'(x)h$. Аналогично, если функция f дважды дифференцируема в точке x , то вторым дифференциалом f в x называют квадратичную форму (однородную квадратичную функцию) $f''(x)h^2$. Вообще, n -ый дифференциал функции f в точке x есть n -ичная форма $f^{(n)}(x)h^n$ (в предположении, что $f^{(n)}(x)$ существует). Для n -го дифференциала f в x используют обозначение $d^n f(x)$.

Таким образом, по определению,

$$d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x) h^n \text{ для всех } h \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Используя формулу (3), видим, что $h^n = (dx(h))^n$, $h \in \mathbb{R}$, или, введя обозначение $(dx(h))^n = dx^n(h)$, имеем $h^n = dx^n(h)$, $h \in \mathbb{R}$. Подставляя последнюю формулу в правую часть формулы (5), получим, что $d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x) dx^n(h)$, $h \in \mathbb{R}$, откуда

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n \quad (6)$$

как равенство двух однородных функций степени n .

Формула (6) записи n -го дифференциала не инвариантна уже при $n=2$.

4. Подставим вместо x функцию дифференцируемую функцию $\varphi(t)$ в левую часть формулы (6) (при $n=2$), получаем

$$d^2 f(\varphi(t))(h) = (f(\varphi(t)))'' \cdot h^2 = (f''(\varphi(t)) \varphi'^2(t) + f'(\varphi(t)) \varphi''(t)) \cdot h^2,$$

а в результате такой же подстановки в правую часть имеем

$$f''(\varphi(t))(d\varphi(t))^2(h) = f''(\varphi(t)) \varphi'^2(t) dt^2(h) = f''(\varphi(t)) \varphi'^2(t) (dt(h))^2 = f''(\varphi(t)) \varphi'^2(t) \cdot h^2. \quad \triangleright$$

9.6. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

При вычислении значений дифференцируемой функции f в точках $x+h$, близких к точке x , в которой значение $f(x)$ и $f'(x)$ известны, часто используют приближенную формулу

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h; \quad (7)$$

т.е., точное, но неизвестное значение приращения $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ функции f заменяют значением $f'(x)h$ дифференциала $df(x)$. Важно оценить допускаемую при этом погрешность.

Здесь мы укажем качественную ("грубую") оценку этой погрешности, используя такой же прием, как и в доказательстве теоремы пункта 6.2 § 6. Именно, найдется число θ_1 , $0 < \theta_1 < 1$, и θ , $0 < \theta < 1$, что

$$\Delta f(x) - df(x) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h = f'(x + \theta_1 h) \cdot h - f'(x)h = [f'(x + \theta_1 h) - f'(x)]h = f''(x + \theta h) h^2$$

(здесь использована формула конечных разностей Лагранжа). Поэтому, если известно, что $|f''(x + \theta h)| \leq M$, то $|\Delta f(x) - df(x)| \leq M \cdot h^2$, т.е., при уменьшении $dx (=h)$, напомним в 2 раза, точность формулы (7) увеличивается в 4 раза.

Отметим ещё, что на самом деле константу M в оценке погрешности можно вдвое уменьшить.

9.7. Дифференциальные формы.

На невырожденном промежутке I каждой его точке x поставим в соответствие какую-либо однородную линейную функцию ℓ_x . Получившееся в результате семейство $\mathcal{L}$ функций $\mathcal{L} = \{\ell_x; x \in I\}$ назовем дифференциальной формой, определенной на I , и обозначают просто $\ell_x, x \in I$. Каждая функция ℓ_x , входящая в $\mathcal{L}$, имеет вид $\ell_x(h) = k(x)h$, $h \in \mathbb{R}$, и коэффициент $k(x)$ фиксируем для каждого $x \in I$, так что на I задаётся некоторая функция $k(x), x \in I$. Используя формулу (3), получим $\ell_x(h) = k(x)dx(h)$, $h \in \mathbb{R}$, и $\ell_x = k(x)dx$. Поэтому, дифференциальная форма $\mathcal{L}$ получает другое обозначение: $k(x)dx, x \in I$.

Итак, любая функция f , определённая на невырожденном промежутке I , задаёт на I дифференциальную форму $f(x)dx, x \in I$, где dx в каждой точке $x \in I$ — тождественное отображение. В частности, если функция f дифференцируема в интервале I , то её дифференциал, определённый на I дифференциальную форму $f'(x)dx, x \in I$.

Часть III.

Интегральное исчисление функций одного переменного.

Глава 1. Неопределённый интеграл

§1. Первообразная и неопределённый интеграл.

1.1. Первообразная.

Первая задача дифференциального исчисления — по данной функции найти её производную. Первая задача интегрального исчисления — обратная: по данной производной восстановить исходную функцию.

Укажем на важные особенности и различия названных задач.

Как известно, область определения D_f производной функции f' всегда не шире области определения D_f функции f ; т.е., $D_{f'} \subset D_f$, и операция дифференцирования (если она применима) имеет единственное решение.

Прежде, чем обсуждать обратную операцию, рассмотрим такой пример. Функция $F(x) = \arcsin x$ определена и непрерывна на отрезке $[-1, 1] = D_F$ и дифференцируема в интервале $(-1, 1)$, где $F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $(-1, 1) = D_f$, так что $D_f \subset D_F$. Этот пример наводит нас на следующее

Определение 1. Функцию $F(x)$ назовём первообразной функцией для функции $f(x)$, если F непрерывна в своей области определения D_F , множество D_F содержит область определения D_f функции f и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in D_f$.

Операция нахождения первообразной называется операцией интегрирования. Так как производная постоянной равна нулю, то вместе с F первообразной для f служат также функции $F + c$ при любой постоянной c : $(F + c)' = F' = f$. Таким образом, операция интегрирования (нахождение первообразной) в отличие от производной первообразная (если существует) определена неоднозначно (даже "двоякозначно"). Сильнейшая неоднозначность зависит от области определения исходной функции.

Пусть, например, $f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда D_f распадается на два интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Функция $F(x) = \ln|x|$ есть первообразная функция для f на обоих интервалах (а значит, и на D_f). Действительно, если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$, поэтому $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Если же $x < 0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$ и $(\ln(-x))' = (-x)' / -x = \frac{1}{x}$. Так как каждая точка $x \in D_f$ содержится в одном из интервалов вместе с некоторой своей окрестностью, а производная функции в точке зависит лишь от последней функции в окрестности этой точки, то первообразной для f на D_f является и функция

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_1 & \text{при } x > 0, \\ \ln|x| + C_2 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные, не зависящие друг от друга постоянные.

Но, если Df - произвольный, то неоднозначность первообразной функции для f исчерпывается произволом в выборе только одной постоянной c .

1.2. Первообразная функция на промежутке.

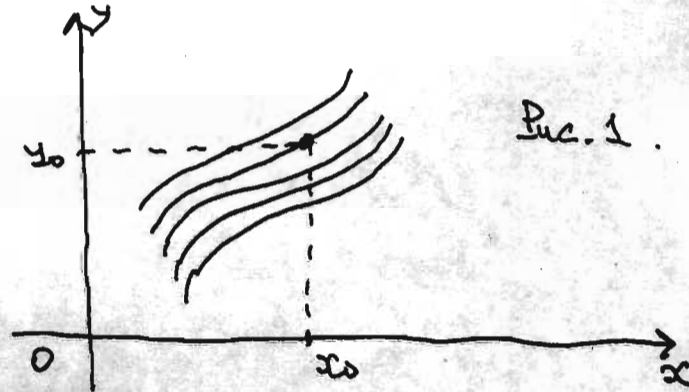
Определение 2. Функция F , определенная на промежутке $\langle a, b \rangle$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, называется первообразной функцией для функции f , если: 1) F непрерывна на $\langle a, b \rangle$, 2) F дифференцируема в интервале (a, b) и 3) производная $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Теорема 1. Всекие две первообразные одной и той же функции, заданной на промежутке, отличаются друг от друга на постоянную.

Пусть F_1 и F_2 - первообразные для f на промежутке $I = \langle a, b \rangle$. Положим $\varphi = F_2 - F_1$. Согласно определению 2, функция φ непрерывна на $\langle a, b \rangle$ (как разность непрерывных функций), дифференцируема в интервале (a, b) и $\varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$. Согласно критерию постоянства функции на промежутке, $\varphi(x) = c$ - постоянная функция на $\langle a, b \rangle$, и следовательно, $F_2(x) = F_1(x) + c$, $x \in \langle a, b \rangle$. Δ

Следствие. Если F - какая-либо первообразная функция для функции f на промежутке I , то совокупность всех первообразных функций для f на I совпадает с совокупностью функций $F + c$, где c - произвольная постоянная, т.е., с множеством

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}. \quad (1)$$



Множество (1) обозначают $F + C$; C называют произвольной постоянной.

Чтобы выделить определенную первообразную Φ функции f из всей их совокупности (1), где F - какая-то первообразная, нужно наложить на Φ некоторое дополнительное условие. Обычно это начальное условие; т.е., требование, чтобы Φ в какой-либо фиксированной точке $x_0 \in I$ имела наперед заданное значение y_0 (см. рис. 1). Действительно, тогда постоянная c однозначно определяется условием $F(x_0) + c = \Phi(x_0) = y_0$, $c = y_0 - F(x_0)$ и $\Phi(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$, $x \in I$.

1.3. Неопределенный интеграл.

Равенство $F'(x) = f(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $dF(x) = f(x)dx$. Поэтому первообразную функции f называют также первообразной дифференциальной формы $f(x)dx$.

Определение 3. Пусть функция f имеет на некотором промежутке первообразную. Тогда произвольную первообразную функции f на этом промежутке назовём неопределённым интегралом функции f , а также дифференциальной формой $f(x)dx$, и обозначим $\int f(x)dx$ (читается: интеграл эф икс де икс). Функцию f называют подынтегральной функцией, а дифференциальную форму $f(x)dx$ — подынтегральным выражением.

Таким образом, в силу следствия к теореме 1,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (2)$$

где F — какая-либо первообразная функции f на рассматриваемом промежутке (по условию, существующая); C назовём постоянной интегрирования.

Например, если k — постоянная, то $\int k dx = kx + C$; в частности, $\int 0 dx = C$; далее,

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{на промежутке } (0, +\infty), \\ \ln(-x) + C_2 & \text{на промежутке } (-\infty, 0), \end{cases}$$

где разные индексы при C означает, что значения этих двух постоянных можно выбирать независимо друг от друга.

Из формулы (2) следует, что

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x) \text{ и } d \int f(x)dx = f(x)dx. \quad (3)$$

Действительно, на основании (2), имеем

$$\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \text{ и } d \int f(x)dx = \left(\int f(x)dx \right)' dx = f(x)dx.$$

С другой стороны, если F — дифференцируемая функция на промежутке, то $dF(x) = F'(x)dx$. Так как F является первообразной дифференциальной формы $dF(x)$, то из формулы (2) следует, что

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (2')$$

1.4. Линейные операции над неопределёнными интегралами.

Неопределённые интегралы можно складывать и умножать на число.

1°. Пусть k — число, отличное от нуля. Функция f имеет первообразную, если и только если её имеет kf ; при этом, тогда $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

Действительно, F есть первообразная для f , если и только если kF есть первообразная для kf ($F'(x) = f(x) \iff (kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$). Тогда $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx + C = k \left(F(x) + \frac{C}{k} \right) = k \int f(x)dx$ посылку $\frac{C}{k}$, как и C , — произвольная постоянная. $\triangleright$

Отметим, что условие $k \neq 0$ здесь существенно: $\int_0^1 f(x) dx = c$,
а $\int_0^1 f(x) dx = 0$; кроме того, $\int_0^1 f(x) dx = c$ для любой функции $f(x)$,
в то время как, $\int f(x) dx$ существует не для всех функций f .

2°. Если f и g имеют первообразные на промежутке $I = \langle a, b \rangle$,
то первообразную имеет $f+g$, причем

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad (4)$$

Если F и G - соответственно первообразные функции для f и g . Так как тогда $F+G$ будет первообразной для суммы $f+g$
($(F+G)' = F' + G' = f+g$), то, в силу формулы (2)

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C, \quad x \in I. \quad (5)$$

С другой стороны, поскольку (по той же причине)

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x) dx = G(x) + C_2, \quad x \in I,$$

то

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2, \quad x \in I. \quad (6)$$

Однако, $C_1 + C_2$ - такая же произвольная постоянная, как и C (так как $\mathbb{R} + \mathbb{R} = \mathbb{R}$), и следовательно, из (5) и (6) вытекает (4). $\triangleright$

Из свойств 1° и 2° следует такое утверждение.

3°. Если функции $f_1, \dots, f_n$ имеют первообразные на промежутке $I = \langle a, b \rangle$ и хотя бы одна из постоянных $k_1, \dots, k_n$ отлична от нуля, то линейная комбинация $k_1 f_1 + \dots + k_n f_n$ также имеет первообразную на I , причем

$$\int [k_1 f_1(x) + \dots + k_n f_n(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx.$$

В частности, $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
в предположении, что правая часть существует.

1.5. Таблица основных интегралов.

В дифференциальном исчислении была установлена дифференцируемость основных элементарных функций (показательных, степенных, логарифмических, тригонометрических и обратных к ним). Кроме того, было показано, что в результате дифференцирования элементарных функций, т.е. функций, полученных из конечного числа основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и образования композиций, получаем также элементарную функцию. С операцией интегрирования дело обстоит иначе.

По-прежнему все основные элементарные функции (рассматриваемые на соответствующих промежутках) обладают первообразными; более того, как будет показано в следующей главе, это верно для всех вообще непрерывных функций. Однако первообразная элементарной функции может уже не быть элементарной функцией. Так, $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ и многие другие задают новые функции, не получающиеся из основных элементарных функций никакими конечными алгебраическими действиями и образованием композиций.

В этой главе поставлена задача: рассмотреть основные приемы интегрирования тех элементарных функций, первообразные которых также элементарные функции. Первый из таких приемов — непосредственное обращение формул дифференцирования элементарных функций.

Приведем таблицу основных неопределенных интегралов, которая получается обращением соответствующих формул дифференцирования. Здесь u — любая дифференцируемая функция (на заданном промежутке). Будем использовать свойство, что форма $df(u) = f'(u)du$ дифференциала инвариантна.

Мы знаем, что $\int 0 du = C$ и $\int du = u + C$. Далее,

$$I. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ для всех } \alpha \neq -1.$$

Эта формула получается обращением (ср. 2') формулы $d \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} = u^\alpha du$, поскольку $\int u^\alpha du = \int d \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$. Δ

В частности, $\int du = u + C$.

II. Пусть $\alpha = -1$. Тогда

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \text{ на любом промежутке, где } u \text{ не обращается в нуль; ит.д.}$$

$$\int \frac{du}{u} = \begin{cases} \ln u + C & \text{при } u \geq 0, \\ \ln(-u) + C & \text{при } u < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Действительно, $d \ln u = \frac{du}{u}$, $d \ln(-u) = \frac{d(-u)}{-u} = \frac{du}{u}$, откуда и следует (7). Δ

В частности,

$$II': \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

Так, $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1) + C$ (на $\mathbb{R}$ перемен x^2+x+1 всюду положительны); $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$ (на любом промежутке, где $\sin x > 0$ или $\sin x < 0$).

$$\text{III. } \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \text{ maka } d \frac{a^u}{\ln a} = a^u du. \text{ Secara umum, } \int e^u du = e^u + C. \quad (6)$$

$$\text{Jarak, } \int x e^{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = -\frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

$$\text{IV. } \int \cos u du = \sin u + C, \text{ maka } d \sin u = \cos u du.$$

$$\text{Jarak, } \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos \sqrt{x} d(\sqrt{x}) = 2 \sin \sqrt{x} + C$$

$$\text{V. } \int \sin u du = -\cos u + C, \text{ maka } d(-\cos u) = \sin u du.$$

$$\text{Jarak, } \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

$$\text{VI. } \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C, \text{ maka } d \tan u = \frac{1}{\cos^2 u} du.$$

$$\text{Jarak, } \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{VII. } \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C, \text{ maka } d(-\cot u) = \frac{1}{\sin^2 u} du.$$

$$\text{Jarak, } \int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\cot \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{VIII. } \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C (= -\arccos u + C).$$

$$\text{VIII' } \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C (= -\arccos \frac{u}{a} + C), \text{ maka } d(\arcsin \frac{u}{a}) = (\arcsin \frac{u}{a})' du = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}} \cdot (\frac{u}{a})' du = \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du.$$

$$\text{IX. } \int \frac{dx}{1+u^2} = \arctan u + C (= -\operatorname{arccot} u + C)$$

$$\text{IX' } \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C (= -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{u}{a} + C), \text{ maka } d(\frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}) = \frac{1}{a} (\arctan \frac{u}{a})' du = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{u^2}{a^2}} (\frac{u}{a})' du = \frac{1}{u^2+a^2} du.$$

$$\text{IX' } \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C (= -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{u}{a} + C), \text{ maka } d(\frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}) = \frac{1}{a} (\arctan \frac{u}{a})' du = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{u^2}{a^2}} (\frac{u}{a})' du = \frac{1}{u^2+a^2} du.$$

§2. Некоторые приёмы интегрирования.

2.1. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям основано на обращении дифференцирования произведения.

Теорема. Пусть u и v - дифференцируемые функции на промежутке I . Тогда существование первообразной на I у любой из дифференциальных форм $u dv$, $v du$ влечёт существование первообразной у другой и равенство

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (1)$$

или, что то же,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \quad (1')$$

Так как $d(uv) = u dv + v du$, то $u dv = d(uv) - v du$. Но $d(uv)$ имеет первообразную на I , а именно, - функцию uv (ср. формулу (2'), §1). Следовательно, если $v du$ также имеет первообразную на I , то то же верно для $u dv$ (ср. свойство 3° множности неопределённого интеграла) и, с учётом формулы (2'), §1

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du. \quad \triangleright$$

Замечание к применению формул (1) и (1'). Постановку знаков интеграла в правой части формулы (1') считая производной функции u , то рекомендатель в подынтегральном выражении интеграла из левой её части функцию v выбирать так, чтобы её производная была бы более простой функцией, по сравнению с u .

Пример. Вычислим интеграл $\int x \arctg x dx$.

В соответствии с рекомендацией и формулой (1'),

$$\begin{aligned} \int x \arctg x dx &= \left[u = \arctg x \quad dv = x dx \right] = \frac{x^2}{2} \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left[1 - \frac{1}{1+x^2} \right] dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + c. \quad \triangleright \end{aligned}$$

2.2. Интегрирование подстановкой.

Этот способ уже неоднократно использовался при рассмотрении примеров на "табличные интегралы" (см. пун. 1.5, §1; примеры к формулам II-V). При этом в каждом частном случае использовалась следующая схема: если $\int f(x) dx$ можно привести к виду $\int g(u) du$, где u - дифференцируемая функция $\psi(x)$, т.е.,

$$f(x) dx = g(u) du, \quad u = \psi(x), \quad (2)$$

то

$$\int f(x) dx = \int g(u) du, \quad (3)$$

где после вычисления интеграла, стоящего в правой части формулы (3), нужно ввести и подставить $\psi(x)$; будем обозначать это символом $\int g(u) du \Big|_{u=\psi(x)}$. Докажем теперь такую теорему (с уточнением промежутков, на которых рассматриваются интегралы (3)).

Теорема. Пусть функция ψ отлична от постоянной, непрерывна на промежутке $I = \langle a, b \rangle$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, и дифференцируема в интервале (a, b) . Если функция g имеет на промежутке $J = R_\psi = \psi(I)$ первообразную и

$$f(x) dx = g(u) du \Big|_{u=\psi(x)} \quad (= g(\psi(x)) \psi'(x) dx),$$

то f имеет первообразную на I и

$$\int f(x) dx = \int g(u) du \Big|_{u=\psi(x)}.$$

А так как $\psi \neq \text{const.}$ и ψ непрерывна на $I = \langle a, b \rangle$, то $J = R_\psi = \psi(I)$ — действительно невырожденный промежуток, $J = \langle \alpha, \beta \rangle$. Пусть G — первообразная для g на J ; т.е., G — непрерывная функция на $J = \langle \alpha, \beta \rangle$, G — дифференцируема в интервале (α, β) и $G' = g$ на (α, β) . Положим $F = G \circ \psi$. Тогда, как композиция непрерывных функций, F непрерывна на промежутке $I = \langle a, b \rangle$, а как композиция дифференцируемых функций, F — дифференцируема в интервале (a, b) и

$$F'(x) = G'(\psi(x)) \psi'(x) = g(\psi(x)) \psi'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Поэтому, F — первообразная функция для f на $I = \langle a, b \rangle$ и

$$\int f(x) dx = F(x) + C = G(\psi(x)) + C = G(u) + C \Big|_{u=\psi(x)} = \int g(u) du \Big|_{u=\psi(x)}.$$

Важное замечание. Формулу (2) называют дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Доказанная теорема и формула (3) указывают способ нахождения решения (интегрирование) дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

2.3. Дополнение к таблице интегралов.

X. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C,$

так как $d \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) = \frac{1}{u + \sqrt{u^2 + a^2}} \left(1 + \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + a^2}}\right) du = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du.$

XI. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$

А поскольку $\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{1}{(u-a)(u+a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a} \right),$ то

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{du}{u+a} = \frac{1}{2a} \ln|u-a| - \frac{1}{2a} \ln|u+a| + C =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C. \quad \Delta$$

2.4. Конкретные подстановки и методы интегрирования алгебраических функций будут подробно рассмотрены на следующем занятии.

§3. Примеры применения неопределенных интегралов.

3.1. Уравнение химической реакции.

Рассмотрим химический процесс, состоящий в превращении взаимодействующих веществ $A, B, \dots$ в вещества $M, N, \dots$. Для оценки количества вещества, участвующего в реакции, его выражают в грамм-молекулах или молях. Молекула какого-либо вещества называется такое его весовое количество, которое выражается в грамм-числах, равном его молекулярному весу. В моле любого вещества всегда содержится одно и то же количество молекул, независимо от вещества.

Если предположить (первое условие для рассматриваемой нами модели процесса), что во взаимодействии выступают на каждую молекулу одного вещества по одной молекуле другого, то на каждую молекулу одного придется одна молекула другого. По истечении времени t от начала реакции от каждого из взаимодействующих веществ выступит в реакцию одно и то же количество молекул. Скорость возрастания x относительно времени t , т.е., производная $\frac{dx}{dt}$, называется скоростью химической реакции.

Пусть в процессе участвуют два вещества A и B , первоначальное количество которых (в молях) обозначим через a и b (при этом $b > a$). Через промежуток времени t будет иметь количество $a-x$ вещества A и количество $b-x$ вещества B . Естественно допустить (второе условие для модели), что скорость химической реакции в момент t пропорциональна произведению реагирующих масс, т.е., произведению количества реагентов, не подвергшихся еще превращению. Это приводит к такому дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \text{ или } \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k dt, \quad k > 0.$$

Интегрируя, получим

$$\int k dt = \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}, \quad \int k dt = kt + C_1, \quad \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} =$$

$$= \int \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right] dx = -\frac{1}{b-a} \ln(a-x) + \frac{1}{b-a} \ln(b-x) + C_2.$$

откуда

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{a-x}{b-x} = -kt + C. \quad (1)$$

(4)

Так как при $t=0$ мы должны иметь $x=0$, то $C = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a}{b}$. Подставив это значение C в формулу (1), получим

$$\ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a} = -k(b-a)t, \quad b-a > 0, k > 0,$$

откуда легко находим, что

$$x = ab \frac{1 - e^{-k(b-a)t}}{b - a e^{-k(b-a)t}}. \quad (2)$$

При возрастании t показательное выражение в (2) стремится к нулю и x стремится к a ; через конечный промежуток времени оно становится настолько малым, что x практически уже не отличается от a , и реакция заканчивается.

3.2. В химических производствах часто приходится очищать газ от некоторой газообразной же примеси, пропуская его через сосуд, содержащий тот или иной поглотитель.

Количество газообразной примеси в процентах, которое поглощается тонким слоем поглотителя при установленном режиме аппарата, пропорционально концентрации примеси в процентах, толщине слоя и площади поперечного сечения (опытно установленные характеристики процесса).

Исходя из этого решим задачу: сосуд (скруббер) имеет форму прямого кругового конуса (для упрощения расчетов производственные скрубберы камеренно выбирают простейшей формы), радиус основания которого равен R , высота — H (см. рис. 1).

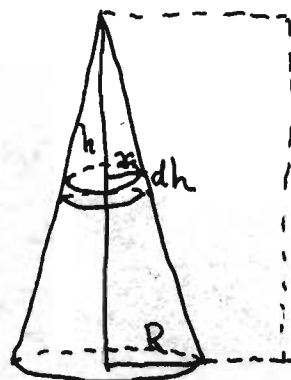


Рис. 1

Концентрация примеси в поступающем газе равна $a\%$, в уходящем — $b\%$.

Вывести формулу, указывающую концентрацию u газообразной примеси в скруббере в зависимости от расстояния h слоя от вершины конуса (газ идет от вершины конуса к его основанию).

Согласно указанным выше условиям, дифференциал газообразной примеси du выразится в виде $du = k u \pi x^2 dh$, где πx^2 — площадь сечения конуса на расстоянии h от его вершины, dh — толщина тонкого слоя поглотителя; k — коэффициент пропорциональности. Поскольку $\frac{x}{h} = \frac{R}{H}$, откуда $x = \frac{R}{H} h$. Следовательно,

$$du = k u \pi \left(\frac{R}{H} h \right)^2 dh \quad \text{и} \quad \frac{du}{u} = \pi k \frac{R^2}{H^2} h^2 dh.$$

Интегрируя, находим, что

$$\ln u = \pi k \frac{R^2}{H^2} \frac{h^3}{3} + C.$$

Начальные условия: $u=a$ при $h=0$; следовательно, $\ln a = C$ и поэтому

$$\ln u = \pi k \frac{R^2}{H^2} \frac{h^3}{3} + \ln a.$$

Определим k , приняв в последней формуле, по условию, $u=v$ при $h=H$.
Тогда $\ln v = \pi k \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} + \ln a$, откуда $k = \frac{3}{\pi H R^2} \ln \frac{b}{a}$. Запишем

образом,

$$\ln u = \pi \frac{3}{\pi H R^2} \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{h^3}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} + \ln a$$

и

$$\ln \frac{u}{a} = \frac{h^3}{H^3} \ln \frac{b}{a},$$

так что окончательно, $u = a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{h^3}{H^3}}$. Δ