Задачи к зачету и экзамену по электродинамике сплошных сред.

Задача 1.
Определить поле вокруг незаряженного проводящего шара радиуса R, находящегося во внешнем однородном электрическом поле $\vec{E}_0$.

Решение. Решение ищем в виде $\varphi = -\left(\vec{E}_0\vec{r}\right) + \varphi_1$, где φ_1 - должна удовлетворять уравнению Лапласа и обращаться в нуль на бесконечности. Этим условиям удовлетворяет функция $\varphi_1 = -C\vec{E}_0\nabla\frac{1}{r} = C\frac{\left(\vec{E}_0\vec{r}\right)}{r^3}$. Далее из гранусловия на поверхности шара имеем

$$\varphi_S = -\left(\vec{E}_0\vec{R}\right) + C\frac{\left(\vec{E}_0\vec{R}\right)}{R^3} \Rightarrow C = R^3 \Rightarrow \varphi\left(\vec{r}\right) = -\left(\vec{E}_0\vec{r}\right)\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

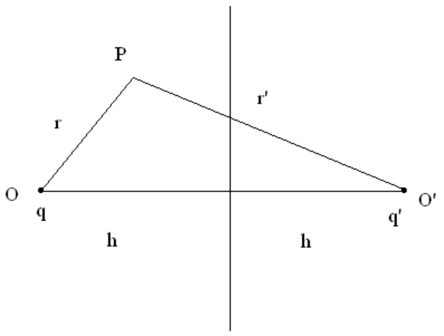
Задача 2.
Определить поле вокруг незаряженного проводящего цилиндра радиуса R, находящегося во внешнем однородном электрическом поле $\vec{E}_0$, перпендикулярном оси цилиндра.

Решение. Решение ищем в виде $\varphi = -\left(\vec{E}_0\vec{r}\right) + \varphi_1$, где φ_1 - должна удовлетворять двумерному уравнению Лапласа и обращаться в нуль на бесконечности. Этим условиям удовлетворяет функция $\varphi_1 = C\left(\vec{E}_0\nabla\ln r\right) = C\frac{\left(\vec{E}_0\vec{r}\right)}{r^2}$. Далее из гранусловия на поверхности шара имеем

$$\varphi_S = -\left(\vec{E}_0\vec{R}\right) + C\frac{\left(\vec{E}_0\vec{R}\right)}{R^2} \Rightarrow C = R^2 \Rightarrow \varphi\left(\vec{r}\right) = -\left(\vec{E}_0\vec{r}\right)\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Задача 3.
Определить поле, создаваемое точечным зарядом q находящемся на расстоянии h от плоской границы раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в среде 1.

Решение.



Потенциал в среде 1 ищем в виде $\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r} + \frac{q'}{\varepsilon_1 r'}$ (удовлетворяет уравнению Пуассона в среде 1) $\Delta\varphi_1 = -\frac{4\pi q\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_O\right)}{\varepsilon_1}$. А потенциал в среде 2 ищем как потенциал фиктивного заряда q'', помещенного в точку $O: \varphi_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r}$. На границе должны быть выполнены условия

$$\varphi_1 = \varphi_2, \Rightarrow \quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \Rightarrow \frac{q + q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2},\ q - q' = q'' \Rightarrow q' = q\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},\ \ q'' = q\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Задача 4.

При выводе уравнений Максвелла в сплошной среде были введены два вспомогательных вектора $\vec{P}, \vec{M}$ соотношениями:

$$\rho_i = -div\vec{P}, \quad \vec{j}_i = c \cdot rot\vec{M} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Выяснить физический смысл этих векторов.

Решение. Для выяснения их физического смысла рассмотрим сначала интеграл (компоненту дипольного момента) для электронейтрального тела

$$\int_V x_i \rho d\vec{r} = -\int_V x_i div\vec{P} d\vec{r} = \int_V \left(P_i - div\left(x_i \vec{P}\right)\right) d\vec{r} = \int_V P_i d\vec{r} - \int_S x_i \vec{P} d\vec{r} = \int_V P_i d\vec{r}$$

Интеграл по поверхности равен нулю (поверхность можно взять вне тела). Тогда интеграл справа равен компоненте дипольного момента. Следовательно, P_i можно интерпретировать как плотность дипольного момента. Плотность определена неоднозначно (с точностью до выражения, которое при интегрировании по объему обращается в нуль). Сложнее со вторым вектором. Рассмотрим полный магнитный момент (для постоянных (или медленно меняющихся полей)

$$\int_V \frac{1}{2c}\left[\vec{r}\vec{j}\right] d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_V \left[\vec{r} \cdot rot\vec{M}\right] d\vec{r}$$

Далее используем обощенную теорему Гаусса (снова поверхность берем вне тела)

$$\frac{1}{2}\int_V \left[\vec{r} \cdot rot\vec{M}\right] d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_V \left[\vec{r} \cdot \left[\nabla \cdot \vec{M}\right]\right] d\vec{r} =$$

$$-\frac{1}{2}\int_S \left[\left[d\vec{S} \cdot rot\vec{M}\right]\vec{r}\right] d\vec{r} - \frac{1}{2}\int_V \left[\left[\vec{M}\nabla\right]\vec{r}\right] d\vec{r} = -\frac{1}{2}\int_V \left[\left[\vec{M}\nabla\right]\vec{r}\right] d\vec{r}$$

Далее имеем

$$\left[\left[\vec{M}\nabla\right]\vec{r}\right] = \left(\vec{M}\nabla\right)\vec{r} - \vec{M}div\vec{r} = \vec{M} - 3\vec{M} = -2\vec{M}$$

В результате вычисляемый интеграл равен $\int_V \frac{1}{2c}\left[\vec{r}\vec{j}\right] d\vec{r} = \int_V \vec{M} d\vec{r}$, что означает: вектор $\vec{M}$ можно интерпретировать как плотность магнитного момента.

Задача 5.

Вывести соотношения Крамерса-Кронига для изотропной среды без пространственной дисперсии.

Решение. Исходим из определения "фурье-образа диэлектрической проницаемости"

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon_{\alpha\beta}(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty [\varepsilon(\tau) - \delta(\tau)]\exp(i\omega\tau)d\tau = 1 + 4\pi\int_0^\infty \alpha(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau$$

где функция $\alpha(\tau) = \dfrac{\varepsilon(\tau) - \delta(\tau)}{4\pi}$ описывает поляризуемость среды

$$\vec{P}(t) = \frac{\vec{D}(t) - \vec{E}(t)}{4\pi} = \int_{t>t'} \alpha(t - t')\vec{E}(t')dt'$$

Поляризуемость, по сравнению с диэлектрической проницаемостью, обладает тем преимуществом, что она конечна и непрерывна (это следует из физических соображений) для любых τ. Тогда как $\varepsilon(\tau)$ содержит особый вклад $\delta(\tau)$. Для функции $\alpha(\tau)$ имеем

$$\alpha(\omega)=\int_0^\infty \alpha(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau$$

Еще одно важное свойство $\alpha(\tau)$состоит в том, что $\alpha(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$. Действительно, значение поляризации в данный момент не должно зависеть от того, что происходило бесконечно “давно”, так как время релаксации среды конечно. Выразим перечисленные свойства $\alpha(\tau)$через свойства фурье-образа $\alpha(\omega)$:

$$\alpha(\omega)=\alpha'(\omega)+i\alpha''(\omega),\ \ \alpha'(\omega)=\int_0^\infty \alpha(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau,\ \ \alpha''(\omega)=\int_0^\infty \alpha(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau$$

$$\alpha'(0)=\int_0^\infty \alpha(\tau)\,d\tau<\infty,\quad \alpha''(0)=0$$

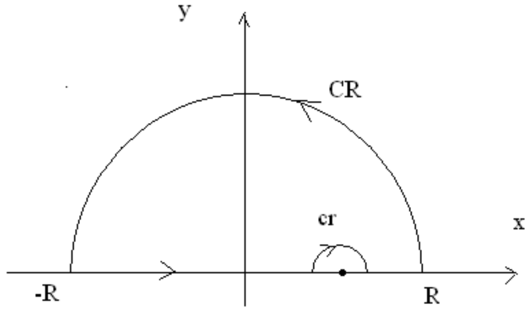
$$\alpha'(\pm\infty)=0,\qquad\qquad \alpha''(\pm\infty)=0$$

Теперь рассмотрим функцию $\alpha(z)$ как функцию комплексной переменной $z=x+iy$. Из свойства причинности следует, что эта функция аналитическая в верхней полуплоскости $y\geq 0$. Представим ее в виде суммы действительной и мнимой частей

$$\alpha(z)=\int_0^\infty \alpha(\tau)\exp(iz\tau)d\tau=\int_0^\infty \alpha(\tau)\exp(ix\tau)\exp(-y\tau)d\tau=u+iv$$

$$u(x,y)=\int_0^\infty \alpha(\tau)\cos(x\tau)\exp(-y\tau)d\tau,\quad v(x,y)=\int_0^\infty \alpha(\tau)\sin(x\tau)\exp(-y\tau)d\tau$$

Проверьте условия Коши –Римана (интегрировать можно сходящиеся интегралы, а это следствие причинности). Поэтому и аналитичность есть следствие причинности. Итак, $\alpha(z)$ аналитична, и кроме того $\alpha(z)\to 0$ при $|z|\to 0$. Вычислим интеграл (далее действуем как при выводе интегральной формулы Коши в ТФКП):



$$\oint\frac{\alpha(z)}{z-\omega}dz=\int_{-R}^{\omega-r}\frac{\alpha(x)}{x-\omega}dx+\int_{\omega+r}^{R}\frac{\alpha(x)}{x-\omega}dx+\int_{CR}\frac{\alpha(z)}{z-\omega}dz+\int_{cr}\frac{\alpha(z)}{z-\omega}dz=0\Rightarrow$$

$$0=v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(x)}{x-\omega}dx+\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{\alpha\left(\omega+re^{i\varphi}\right)}{re^{i\varphi}}re^{i\varphi}id\varphi\Rightarrow\alpha(\omega)=\frac{1}{i\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(x)}{x-\omega}dx$$

Буквы перед интегралом $v.p.$ означают , что этого интеграл в смысле главного значения. Отсюда имеем соотношения Крамерса-Кронига

$$\alpha'(\omega)=\frac{1}{\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha''(x)}{x-\omega}dx,\quad \alpha''(\omega)=-\frac{1}{\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha'(x)}{x-\omega}dx$$

Проверить выполняются ли они для модели Дебая

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{4\pi\alpha_0}{1-i\omega\tau}$$

Задача 6.
Вывести дисперсионное уравнение из уравнений Максвелла.
Решение. Исходим из уравнений Максвелла

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad div\vec{B} = 0$$

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad div\vec{D} = 0$$

Подстановка гармонической зависимости всех функций дает ($\vec{E},\vec{H},\vec{D},\vec{B} \propto \exp\left(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t\right)$):

$$\left(\vec{k}\vec{D}\right) = 0, \quad \left[\vec{k}\vec{H}\right] = -\frac{\omega}{c}\vec{D}, \quad \left(\vec{k}\vec{B}\right) = 0, \quad \left[\vec{k}\vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{B}$$

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta, \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta}H_\beta$$

Это система линейных однородных уравнений относительно амплитуд. Условием существования ненулевого решения является равенство нулю детерминанта этой системы. Часто электромагнитная поляризация задается амплитудой электрического поля E_i. Поэтому в вышеупомянутой системе принято исключать все другие переменные, кроме E_i. После такого исключения (выкладки обязательно проделать самостоятельно) получаем систему уравнений

$$\left(k_\alpha k_\beta - k^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\gamma}\mu_{\gamma\beta}\right)E_\beta = 0 \Rightarrow \det\left(k_\alpha k_\beta - k^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\gamma}\mu_{\gamma\beta}\right) = 0$$

Привести какой-либо пример использования дисперсионного уравнения.

Задача 7.
Вывести выражение для диэлектрической проницаемости в модели неполярного диэлектрика. Найти частоты, соответствующие экстремумам действительной и мнимой части поляризуемости. Выделите и постройте графики действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости (один вид осцилляторов). Найдите комплексный показатель преломления $\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$.
Решение. Исходим из уравнения для упругого диполя с затуханием

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} - k\vec{r} - \eta\dot{\vec{r}}$$

Решение этого уравнения для гармонической зависимости от времени имеет вид

$$\vec{r}_\omega(t) = -\frac{e}{m}\cdot\frac{\vec{E}_\omega(t)}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma}$$

Отсюда имеем

$$\vec{P}_\omega = Ne\vec{r}_\omega \Rightarrow \vec{D}_\omega = \varepsilon(\omega)\vec{E}_\omega = \vec{E}_\omega + 4\pi\vec{P}_\omega = \left(1 - \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma}\right)\vec{E}_\omega \Rightarrow$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Последнее выражение можно несколько обобщить, учитывая тот факт, что каждой молекуле можно поставить несколько осцилляторов с своими частотами и затуханиями

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \sum_i \frac{\omega_p^2 f_i}{\omega^2 - \omega_{0i}^2 + i\omega\gamma_i}, \quad f_i = \frac{N_i}{N}$$

Дорешать задачу самостоятельно.

Задача 8.
Ввести в модель Друде-Лоренца магнитное поле

$$m\dot{\vec{v}} + \frac{m}{\tau}\vec{v} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]\right)$$

Найти стационарное решение (скорость постоянна) для длинного (вдоль оси y) проводника.
На основе этой модели описать эффект Холла.

Задача 9.
Используя результаты задачи 8 дать описание эффекта Холла в модели с двумя типами носителей.

Задача 10.
Исследовать магнетосопротивление в модели Друде-Лоренца с идним и двумя типами носителей.

Задача 11.
Найти законы дисперсии продольных и поперечных электромагнитных волн в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью вида

$$\varepsilon\left(\omega\right) = 1 + \left(\varepsilon_0 - 1\right)\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Почему в ионных кристаллах высокочастотная ветвь поляритонов имеет более низкую частоту, чем в неполярных диэлектриках.

Задача 12.
В модели Друде-Лоренца найти комплексный показатель преломления для областей частот $\omega \ll \gamma, \quad \gamma < \omega < \tilde{\omega}_p, \quad \omega \gg \tilde{\omega}_p$. Каким физическим эффектам соответствую эти три предельных случая?

Задача 13.
Рассмотрите гидродинамическую модель плазмы с затуханием

$$mN\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v}\right] = -\nabla p + eN\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]\right) - mN\frac{\vec{v}}{\tau}$$

Выведете формулы для поперечной и продольной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_t\left(k^2,\omega\right) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega + \dfrac{i}{\tau}\right)}, \quad \varepsilon_l\left(k^2,\omega\right) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega + \dfrac{i}{\tau}\right) - \left(\partial p/\partial N\right)_0\left(k^2/m\right)}$$

Найдите частоты поперчных и продольных волн в такой модели плазмы.

Задача 14.
Магнетизм.
Задача 15.
Магнетизм.
Задача 16.
Сверхпроводники.
Задача 17.