Дифференциальные уравнения
для факультета фундаментальной физико-химической инженерии

Программа курса (вопросы к экзамену)

2018/19 уч. год

Часть I

1. Задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям: радиоактивный распад, тримолекулярная реакция, свободные и затухающие колебания.
2. Обыкновенное дифференциальное уравнение и связанные с ним общие понятия: частное и общее решение, интегральная кривая, частный и общий интеграл. Уравнение в нормальной форме, начальное условие, задача Коши. Уравнение с разделяющимися переменными.
3. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель, его нахождение в некоторых частных случаях.
4. Линейное уравнение первого порядка: линейность пространства решений, существование и единственность решения, метод вариации постоянной.
5. Уравнения Бернулли, его сведение к линейному уравнению. Уравнение Риккати, его сведение к уравнению Бернулли.
6. Уравнение, не разрешённое относительно производной-I: *теорема о существовании и единственности решения*, некоторые методы решения.
7. Уравнение, не разрешённое относительно производной-II: решение с помощью введения параметра, уравнения Клеро и Лагранжа.
8. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка: *теорема о существовании и единственности решения.* Линейность пространства решений однородного линейного уравнения, связь между общими решениями однородного и неоднородного уравнений.
9. Линейная зависимость и независимость функций, связь этих свойств с обращением в нуль определителя Вронского (вронскиана).
10. Однородное линейное уравнение: фундаментальная система решений и её существование, вид общего решения. *Единственность и явный вид линейного уравнения с данной фундаментальной системой решений.*
11. Однородное линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами: характеристический многочлен, фундаментальная система решений и общее решение в случае n различных корней *и в общем случае.*
12. *Лемма о производной вронскиана.* Формула Лиувилля – Остроградского и её применение к решению однородного линейного уравнения второго порядка. Линейные краевые задачи. *Теорема об альтернативе.*
13. Неоднородное линейное уравнение: вид общего решения, метод вариации постоянных (для уравнений второго *и n-го порядка*). Неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами: *вид частного решения в случае правой части — квазиполинома.*
14. Уравнение Эйлера: его сводимость к уравнению с постоянными коэффициентами, определяющий многочлен, нахождение фундаментальной системы решений.

Помимо знания материала, подробно описанного в пунктах программы, предполагается знание примеров к нему. *Курсив означает необязательность знания соответствующих доказательств.*

В билет входят: вопрос из части I, вопрос из части II, задачи.

Часть II

1. Системы дифференциальных уравнений. Нормальная система: сведение к ней уравнения n-го порядка, частное и общее решение, интегральная кривая. Линейные системы. *Существование и единственность решения для нормальных и для линейных систем. Линейная зависимость и независимость вектор-функций, связь этих свойств с обращением в нуль вронскиана.*

2. *Однородная линейная система: линейность пространства решений, фундаментальная система решений, вид общего решения, формула Лиувилля – Остроградского.* Неоднородная линейная система: *вид общего решения*, метод вариации постоянных.

3. Однородная линейная система n-го порядка с постоянными коэффициентами-I: характеристический многочлен, общее решение при наличии n линейно независимых собственных векторов у матрицы коэффициентов *и в общем случае* (*без использования жордановой формы*).

4. Однородная линейная система с постоянными коэффициентами-II: *нахождение фундаментальной системы решений в общем случае с использованием жордановой формы матрицы коэффициентов*. Пример из кинетики сложных реакций.

5. Многочлен и рациональная функция от матрицы. Матричные ряды. Матричная экспонента, *её свойства*. Связь матричной экспоненты с однородными линейными системами.

6. Устойчивость-I: определения и примеры устойчивых, асимптотически устойчивых и неустойчивых решений уравнений и систем, сведение исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения. *Исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова.*

7. Устойчивость-II: устойчивость решений однородной линейной системы с постоянными коэффициентами, *исследование устойчивости по первому приближению.*

8. Автономные системы-I: фазовое пространство, фазовые траектории, особые точки (положения равновесия, точки покоя), свойства решений и траекторий.

9. Автономные системы-II: *классификация фазовых траекторий*, предельные точки, предельные множества и *их свойства*, *теорема Бендиксона.*

10. Поведение траекторий-I (вблизи точки покоя линейной системы второго порядка с постоянными коэффициентами): узел, седло, центр, фокус, случай кратного собственного значения.

11. Поведение траекторий-II: вырожденные случаи (при наличии нулевого собственного значения). *Исследование особых точек по первому приближению.*

12. Первые интегралы нормальной системы-I: определение, геометрический смысл, *существование функционально независимых первых интегралов, выражение через них произвольного первого интеграла, задание ими решения.*

13. Первые интегралы нормальной системы-II: *первые интегралы автономной системы.* Системы в симметричной форме, интегрируемые комбинации.

14. Пример задачи Коши с неединственным решением. Связь дифференциального уравнения с интегральным. Решение задачи Коши как неподвижная точка соответствующего интегрального оператора. Метод последовательных приближений.

15. Сжимающие отображения. Теорема Банаха о неподвижной точке. Липшицевы функции, примеры липшицевых и нелипшицевых функций одной и нескольких переменных.

16. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения в нормальной форме. Продолжение решения уравнения до границы области *и продолжение на весь интервал.*

17. *Непрерывная зависимость решения уравнения от параметра. Дифференцирование решения уравнения по параметру. Дифференцирование решения системы по параметру и его разложение по степеням малого параметра.*